

VII

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ



Цена 53 коп.

Книга является седьмым томом получившего широкую известность как у нас, так и за границей курса теоретической физики академика Л. Д. Ландау и профессора Е. М. Лифшица.

Эта часть курса впервые выделена в отдельный том: ранее «Теория упругости» была составной частью книги «Механика сплошных сред», которая вышла вторым изданием в 1954 г.

Наиболее существенным дополнением к настоящему изданию явилась глава IV «Дислокации». В остальной части текста по сравнению с предыдущим изданием внесены лишь незначительные изменения и уточнения.

Этим томом издательство продолжает переиздание всего курса теоретической физики, который включает девять томов.

Курс теоретической физики академика Л. Д. Ландау и профессора Е. М. Лифшица включает следующие девять томов:

1. Механика
2. Теория поля
3. Квантовая механика (нерелятивистская теория)
4. Релятивистская квантовая теория
5. Статистическая физика
6. Гидродинамика
7. Теория упругости
8. Электродинамика сплошных сред
9. Физическая кинетика

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Том VII

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1965

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,  
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1965

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Некоторые обозначения . . . . .	8
<b>Глава I. Основные уравнения теории упругости . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Тензор деформации . . . . .	9
§ 2. Тензор напряжений . . . . .	13
§ 3. Термодинамика деформирования . . . . .	18
§ 4. Закон Гука . . . . .	20
§ 5. Однородные деформации . . . . .	24
§ 6. Деформации с изменением температуры . . . . .	27
§ 7. Уравнения равновесия изотропных тел . . . . .	30
§ 8. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью . . . . .	39
§ 9. Соприкосновение твёрдых тел . . . . .	45
§ 10. Упругие свойства кристаллов . . . . .	52
<b>Глава II. Равновесие стержней и пластинок . . . . .</b>	<b>61</b>
§ 11. Энергия изогнутой пластинки . . . . .	61
§ 12. Уравнение равновесия пластинки . . . . .	63
§ 13. Продольные деформации пластинок . . . . .	71
§ 14. Сильный изгиб пластинок . . . . .	76
§ 15. Деформации оболочек . . . . .	81
§ 16. Кручение стержней . . . . .	89
§ 17. Изгиб стержней . . . . .	96
§ 18. Энергия деформированного стержня . . . . .	101
§ 19. Уравнения равновесия стержней . . . . .	103
§ 20. Слабый изгиб стержней . . . . .	114
§ 21. Устойчивость упругих систем . . . . .	124
<b>Глава III. Упругие волны . . . . .</b>	<b>130</b>
§ 22. Упругие волны в изотропной среде . . . . .	130
§ 23. Упругие волны в кристаллах . . . . .	137
§ 24. Поверхностные волны . . . . .	139
§ 25. Колебания стержней и пластинок . . . . .	144
§ 26. Ангармонические колебания . . . . .	151

Глава IV. Дислокации . . . . .	156
§ 27. Упругие деформации при наличии дислокации . . . . .	156
§ 28. Действие поля напряжений на дислокацию . . . . .	165
§ 29. Непрерывное распределение дислокаций . . . . .	169
§ 30. Распределение взаимодействующих дислокаций . . . . .	174
§ 31. Равновесие трещины в упругой среде . . . . .	179
Глава V. Теплопроводность и вязкость твёрдых тел . . . . .	185
§ 32. Уравнение теплопроводности в твёрдых телах . . . . .	185
§ 33. Теплопроводность кристаллов . . . . .	187
§ 34. Вязкость твёрдых тел . . . . .	189
§ 35. Поглощение звука в твёрдых телах . . . . .	192
§ 36. Очень вязкие жидкости . . . . .	200
Предметный указатель . . . . .	203

## ПРЕДИСЛОВИЕ К «ТЕОРИИ УПРУГОСТИ»

В этом издании теория упругости выделена в отдельный том, как это и предполагалось по первоначальному плану (её объединение в одной книге с гидродинамикой в предыдущем издании было вызвано случайными причинами).

Помимо небольших исправлений и вставок, книга дополнена новой главой о макроскопической теории дислокаций. Эта глава написана совместно с А. М. Косевичем. Я хотел бы выразить здесь свою искреннюю благодарность А. М. Косевичу за оказанную им таким образом помощь.

Я благодарен также Г. И. Баренблатту, В. Л. Гинзбургу, М. А. Исаковичу, И. М. Лифшицу и И. М. Шмушкевичу за полезные замечания.

При изучении книги в объёме «теоретического минимума» для физиков-теоретиков можно рекомендовать опустить §§ 8, 9, 11—21, 25—31.

*Е. М. Лифшиц*

Декабрь 1964 г.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К «МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД»

...В книге, написанной физиками и в первую очередь для физиков, нас, естественно, интересовали вопросы, которые обычно не излагаются в курсах теории упругости; таковы, например, вопросы теплопроводности и вязкости твёрдых тел, ряд вопросов теории упругих колебаний и волн. В то же время мы лишь очень кратко касаемся ряда специальных проблем (например, сложных математических методов теории упругости, теории оболочек и т. п.), в которых к тому же авторы ни в какой степени не являются специалистами.

*Л. Ландау, Е. Лифшиц*

1953 г.

## НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Плотность вещества  $\rho$

Вектор смещения  $\mathbf{u}$

Тензор деформации  $\mu_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$

Тензор напряжений  $\sigma_{ik}$

Модуль всестороннего сжатия  $K$

Модуль растяжения (модуль Юнга)  $E$

Коэффициент Пуассона  $\sigma$

Продольная и поперечная скорости звука  $c_l$  и  $c_t$  (их выражения через

$K$ ,  $\mu$  или  $E$ ,  $\sigma$  — см. стр. 131)

Величины  $K$ ,  $\mu$  и  $E$ ,  $\sigma$  связаны формулами:

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)},$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

## ГЛАВА I ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### § 1. Тензор деформации

Механика твёрдых тел, рассматриваемых как сплошные среды, составляет содержание так называемой теории упругости<sup>1)</sup>.

Под влиянием приложенных сил твёрдые тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объём. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом. Положение каждой точки тела определяется её радиус-вектором  $\mathbf{r}$  (с компонентами  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки, вообще говоря, смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определённую точку тела; если её радиус-вектор до деформирования был  $\mathbf{r}$ , то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение  $\mathbf{r}'$  (с компонентами  $x'_i$ ). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , который мы обозначим посредством  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u}_i = x'_i - x_i. \quad (1,1)$$

Вектор  $\mathbf{u}$  называется *вектором деформации* (или *вектором смещения*). Координаты  $x'_i$  смещённой точки являются, конечно, функциями от координат  $x_i$  той же точки до её смещения. Поэтому и вектор деформации  $\mathbf{u}_i$  является функцией координат  $x_i$ . Задание вектора  $\mathbf{u}$  как функции от  $x_i$  полностью определяет деформацию тела.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим какие-нибудь две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформирования был  $d\mathbf{x}_i$ , то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками будет  $d\mathbf{x}'_i = d\mathbf{x}_i + d\mathbf{u}_i$ . Само расстояние между точками было равно до деформирования

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

<sup>1)</sup> Основные уравнения теории упругости были установлены Коши и Пуассоном в 20-х годах XIX века.

а после деформирования

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}.$$

Согласно общему правилу написания сумм<sup>1)</sup> мы можем написать:

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Подставляя  $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ , переписываем  $dl'^2$  в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l.$$

Поскольку во втором члене справа производится суммирование по обоим индексам  $i$  и  $k$ , то можно написать:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k.$$

В третьем же члене поменяем местами индексы  $i$  и  $l$ . Тогда мы получим окончательно  $dl'^2$  в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k, \quad (1,2)$$

где тензор  $u_{ik}$  определяется посредством

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1,3)$$

Этими выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела.

Тензор  $u_{ik}$  называется *тензором деформации*. Из его определения видно, что он симметричен, т. е.

$$u_{ik} = u_{ki}. \quad (1,4)$$

Так получилось потому, что мы написали в  $dl'^2$  член  $2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k$  в явно симметричном виде  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k$ .

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор  $u_{ik}$  в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат,—главные оси тензора,—в которой из всех компонент  $u_{ik}$  отличны от нуля только «диагональные» компоненты  $u_{11}$ ,  $u_{22}$ ,  $u_{33}$ . Эти компоненты,—главные значения тензора деформации,—обозначим посредством  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$ ,  $u^{(3)}$ . Надо, конечно, помнить, что если тензор  $u_{ik}$  приведён

<sup>1)</sup> Следуя обычному правилу, мы везде опускаем знаки суммирования по векторным и тензорным индексам; по всем дважды повторяющимся (в данном выражении) индексам везде подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3.

к главным осям в некоторой точке тела, то он, вообще говоря, недиагонален во всех других точках.

Если тензор деформации приведён в данной точке к главным осям, то в окружающем её элементе объёма элемент длины (1,2) приобретает вид

$$dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2.$$

Мы видим, что это выражение распадается на три независимых члена. Это значит, что в каждом элементе объёма тела деформацию можно рассматривать как совокупность трёх независимых деформаций по трём взаимно перпендикулярным направлениям—главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций представляет собой простое растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления: длина  $dx_1$  вдоль первой из главных осей превращается в длину  $dx_1' = \sqrt{1 + 2u^{(1)}} dx_1$  и аналогично для двух других осей. Величины  $\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$  представляют собой, следовательно, относительные удлинения  $\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i}$  вдоль этих осей.

Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Это значит, что изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Другими словами, относительные удлинения малы по сравнению с единицей. Ниже мы будем рассматривать все деформации как малые.

Если тело подвергается малой деформации, то все компоненты тензора деформации, определяющего, как мы видели, относительные изменения длин в теле, являются малыми. Что же касается вектора деформации  $u_i$ , то он может быть в некоторых случаях большим даже при малых деформациях. Рассмотрим, например, длинный тонкий стержень. Даже при сильном изгибе, когда его концы значительно переместятся в пространстве, растяжения и сжатия внутри самого стержня будут незначительными.

За исключением таких особых случаев<sup>1)</sup>, при малых деформациях является малым также и вектор деформации. Действительно, никакое «трёхмерное» тело (т. е. тело, размеры которого не специально малы ни в каком направлении) не может быть, очевидно, деформировано так, чтобы отдельные его части сильно переместились в пространстве, без возникновения в теле сильных растяжений и сжатий.

Тонкие стержни будут нами рассмотрены отдельно в главе II. В остальных же случаях, следовательно, при малых деформациях  $u_i$

<sup>1)</sup> Кроме деформаций тонких стержней сюда относятся изгибы тонких пластинок в цилиндрическую поверхность.

мало, и потому в общем выражении (1,3) мы можем теперь пренебречь последним членом как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор деформации определяется выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1,5)$$

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)},$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора  $u_{ik}$ .

Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объёма  $dV$  и определим его величину  $dV'$  после деформирования тела. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины  $dx_1, dx_2, dx_3$  вдоль этих осей после деформирования перейдут в  $dx'_1 = (1 + u^{(1)}) dx_1$  и т. д. Объём  $dV$  есть произведение  $dx_1 dx_2 dx_3$ , объём же  $dV'$  равен  $dx'_1 dx'_2 dx'_3$ . Таким образом,

$$dV' = dV (1 + u^{(1)}) (1 + u^{(2)}) (1 + u^{(3)}).$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' \approx dV (1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}).$$

Но сумма  $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$  главных значений тензора есть, как известно, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент  $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$ .

Таким образом,

$$dV' = dV (1 + u_{ii}). \quad (1,6)$$

Мы видим, что сумма диагональных компонент тензора деформации представляет собой относительное изменение объёма  $\frac{dV' - dV}{dV}$ .

Часто бывает удобным пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовых, а в сферических или цилиндрических координатах. Приведём здесь для справок соответствующие формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в тех же координатах. В сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  имеем:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2u_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, & 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (1,7)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ :

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1,8)$$

## § 2. Тензор напряжений

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объём, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объём со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется, и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нём возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются *внутренними напряжениями*. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нём отсутствуют.

Внутренние напряжения обуславливаются молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень незначительным «радиусом действия». Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстоянии порядка междумолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обуславливающие внутренние напряжения, являются в теории упругости силами «близкодействующими», передающимися от каждой точки только к ближайшим с нею. Отсюда следует, что силы, оказываемые на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих её частей, действуют только непосредственно через поверхность этой части.

Необходимо сделать здесь следующую оговорку: сделанное утверждение не справедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нём макроскопических электрических полей (пиро- и пьезоэлектрические тела). В этой книге, однако, мы не будем рассматривать свойств таких тел.

Выделим в теле какой-нибудь объём и рассмотрим действующую на него суммарную силу. С одной стороны, эта суммарная сила



равна сумме всех сил, действующих на каждый из элементов рассматриваемого объёма, т. е. может быть представлена в виде объёмного интеграла

$$\int \mathbf{F} dV,$$

где  $\mathbf{F}$  есть сила, действующая на единицу объёма тела, так что на элемент объёма  $dV$  действует сила  $\mathbf{F} dV$ . С другой стороны, силы, с которыми действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объёма, не могут привести к появлению отличной от нуля суммарной равнодействующей силы, поскольку они в силу закона равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому искомую полную силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объём со стороны окружающих его частей тела. Но согласно сказанному выше эти силы действуют на рассматриваемый объём через его поверхность, и потому результирующая сила может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объёма, т. е. в виде некоторого интеграла по этой поверхности.

Таким образом, для любого объёма тела каждая из трёх компонент  $\int F_i dV$  равнодействующей всех внутренних напряжений может быть преобразована в интеграл по поверхности этого объёма. Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объёму может быть преобразован в интеграл по поверхности в том случае, если этот скаляр является дивергенцией некоторого вектора. В данном случае мы имеем дело с интегралом не от скаляра, а от вектора. Поэтому вектор  $F_i$  должен являться дивергенцией некоторого тензора второго ранга, т. е. иметь вид

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2,1)$$

Тогда сила, действующая на некоторый объём, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей данный объём<sup>1)</sup>:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (2,2)$$

где  $df_i$  — компоненты вектора  $d\mathbf{f}$  элемента поверхности, направленного, как всегда, по внешней нормали к поверхности<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Интеграл по замкнутой поверхности преобразуется в интеграл по охватываемому этой поверхностью объёму путём замены элемента поверхности  $df_i$  оператором  $dV \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

<sup>2)</sup> Строго говоря, при определении полной силы, действующей на деформированный объём тела, интегрирование должно производиться не по ста-

Тензор  $\sigma_{ik}$  называется *тензором напряжений*. Как видно из (2, 2),  $\sigma_{ik} df_k$  есть  $i$ -я компонента силы, действующей на элемент поверхности  $df$ . Выбирая элементы поверхности в плоскостях  $x, y; y, z; x, z$ , находим, что компонента  $\sigma_{ik}$  тензора напряжений есть  $i$ -я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси  $x_k$ . Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси  $x$ , действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси  $x$ ) сила  $\sigma_{xx}$  и тангенциальные (направленные по осям  $y$  и  $z$ ) силы  $\sigma_{yx}$  и  $\sigma_{zx}$ .

Необходимо сделать здесь следующее замечание по поводу знака силы  $\sigma_{ik} df_k$ . В (2,2) интеграл по поверхности представляет собой силу, действующую на ограниченный этой поверхностью объём со стороны окружающих частей тела. Наоборот, сила, с которой этот объём действует сам на окружающую его поверхность, имеет обратный знак. Поэтому, например, сила, действующая со стороны внутренних напряжений на всю поверхность тела, есть

$$-\oint \sigma_{ik} df_k,$$

где интеграл берётся по поверхности тела, а  $d\mathbf{f}$  направлен по внешней нормали.

Определим момент сил, действующих на некоторый объём тела. Момент силы  $\mathbf{F}$  можно, как известно, написать в виде антисимметрического тензора второго ранга с компонентами  $F_i x_k - F_k x_i$ , где  $x_i$  — координаты точки приложения силы<sup>1)</sup>. Поэтому момент сил, действующих на элемент объёма  $dV$ , есть  $(F_i x_k - F_k x_i) dV$ , а на весь объём действует момент сил

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV.$$

Как и полная сила, действующая на любой объём, момент этих сил тоже должен выражаться в виде интеграла по поверхности объёма. Подставляя для  $F_i$  выражение (2,1), находим:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int \left( \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV = \\ &= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left( \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV. \end{aligned}$$

рым координатам  $x_i$ , а по координатам  $x'_i$  точек деформированного тела. Соответственно этому и производные (2,1) должны были бы браться по  $x'_i$ . Однако ввиду малости деформаций производные по  $x_i$  и  $x'_i$  отличаются друг от друга на величины высших порядков малости, и потому можно все дифференцирования производить по координатам  $x_i$ .

<sup>1)</sup> Момент силы  $\mathbf{F}$  определяется как векторное произведение  $[\mathbf{F}\mathbf{r}]$ ; из векторного анализа известно, что компоненты векторного произведения двух векторов составляют антисимметрический тензор второго ранга, написанный в тексте.

Во втором члене замечаем, что производные от одной координаты по другой равны единице, если обе координаты одинаковы, или нулю, если координаты разные (три координаты являются независимыми переменными). Таким образом,  $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$ , где  $\delta_{kl}$  есть единичный тензор; при умножении на  $\sigma_{ik}$  он даёт  $\delta_{kl}\sigma_{il} = \sigma_{ik}$ ,  $\delta_{il}\sigma_{kl} = \sigma_{ki}$ . В первом же члене под интегралом стоит дивергенция некоторого тензора; этот интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности. В результате находим:

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV.$$

Для того чтобы  $M_{ik}$  было выражено в виде интеграла только по поверхности, необходимо, чтобы второй член здесь тождественно исчезал, т. е. должно быть  $\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 0$ , или

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (2,3)$$

Таким образом, мы приходим к существенному результату, что тензор напряжений является симметрическим тензором. Момент сил, действующих на некоторый объём тела, может быть написан теперь в простом виде:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) df_l. \quad (2,4)$$

Легко написать тензор напряжений в случае равномерного *всестороннего сжатия* тела. При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объёма тела. Если обозначить это давление посредством  $p$ , то на элемент поверхности  $df_i$  действует сила  $-p df_i$ . С другой стороны, эта сила, будучи выражена через тензор напряжений, должна иметь вид  $\sigma_{ik} df_k$ . Написав  $-p df_i$  в виде  $-p \delta_{ik} df_k$ , мы видим, что тензор напряжений при равномерном всестороннем сжатии выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}. \quad (2,5)$$

Все отличные от нуля его компоненты равны просто давлению.

В общем случае произвольной деформации отличны от нуля также и недиагональные компоненты тензора напряжений. Это значит, что на каждый элемент поверхности внутри тела действует не только нормальная к нему сила, но также и тангенциальные, «скальвающие», напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться в каждом элементе объёма тела, т. е. должно быть

$F_i = 0$ . Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (2,6)$$

Если тело находится в поле тяжести, то должна исчезать сумма  $F + \rho g$  сил внутренних напряжений и силы тяжести  $\rho g$ , действующей на единицу объёма тела ( $\rho$  — плотность<sup>1)</sup>,  $g$  — вектор ускорения силы тяжести, направленный вертикально вниз); уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \quad (2,7)$$

Что касается внешних сил, приложенных непосредственно к поверхности тела (которые и являются обычно источником деформации), то они входят в граничные условия к уравнениям равновесия. Пусть  $P$  есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, так что на элемент поверхности  $df$  действует сила  $P df$ . В равновесии она должна компенсироваться силой  $-\sigma_{ik} df_k$ , действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0.$$

Написав  $df_k$  в виде  $df_k = n_k df$ , где  $n$  — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности, находим отсюда

$$\sigma_{ik} n_k = P_i. \quad (2,8)$$

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

Выведем здесь ещё формулу, определяющую среднее значение тензора напряжений в деформированном теле. Для этого умножим уравнение (2,6) на  $x_k$  и проинтегрируем по всему объёму тела:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l} dV - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dV = 0.$$

Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по поверхности тела; во втором замечаем, что  $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$ . Получаем:

$$\oint \sigma_{il} x_k df_l - \int \sigma_{ik} dV = 0.$$

Подставляя в первый интеграл (2,8), находим:

$$\oint P_i x_k df = \int \sigma_{ik} dV = \bar{V} \bar{\sigma}_{ik},$$

<sup>1)</sup> Строго говоря, плотность тела при его деформировании меняется. Учёт этого изменения приводит, однако, в случае малых деформаций к величинам высших порядков малости и потому для нас несуществен

где  $V$ —объём тела, а  $\bar{\sigma}_{ik}$ —среднее по всему объёму значение тензора напряжений. Воспользовавшись тем, что  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ , можно написать эту формулу в симметричном виде:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i) df. \quad (2,9)$$

Таким образом, среднее значение тензора напряжений может быть определено непосредственно по действующим на тело внешним силам без предварительного решения уравнений равновесия.

### § 3. Термодинамика деформирования

Рассмотрим какое-нибудь деформированное тело и предположим, что его деформация меняется так, что вектор деформации  $u_i$  изменяется на малую величину  $\delta u_i$ . Определим работу, производимую при этом силами внутренних напряжений. Умножая силу  $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  на перемещение  $\delta u_i$  и интегрируя по всему объёму тела, имеем:

$$\int \delta R dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV.$$

Посредством  $\delta R$  мы обозначили работу сил внутренних напряжений в единице объёма тела. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int \delta R dV = \oint \sigma_{ik} \delta u_i df_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV.$$

Рассматривая неограниченную среду, не деформированную на бесконечности, стремим поверхность интегрирования в первом интеграле к бесконечности; тогда на ней  $\sigma_{ik} = 0$ , и интеграл исчезает. Второй же интеграл можно, воспользовавшись симметрией тензора  $\sigma_{ik}$ , переписать в виде

$$\begin{aligned} \int \delta R dV &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV = -\int \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV. \end{aligned}$$

Таким образом, находим:

$$\delta R = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}. \quad (3,1)$$

Эта формула определяет работу  $\delta R$  по изменению тензора деформации.

Если деформация тела достаточно мала, то по прекращении действия вызвавших деформацию внешних сил тело возвращается в исходное недеформированное состояние. Такие деформации называют *упругими*. При больших деформациях прекращение действия внешних сил не приводит к полному исчезновению деформации,—

остаётся, как говорят, некоторая остаточная деформация, так что состояние тела отличается от того, в каком оно находилось до начала действия сил. Такие деформации называют *пластическими*. В дальнейшем мы будем рассматривать только упругие деформации.

Предположим далее, что процесс деформирования совершается настолько медленно, что в каждый момент времени в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия, соответствующее тем внешним условиям, в которых тело в данный момент находится (фактически это условие почти всегда выполняется). Тогда, как известно, процесс будет термодинамически обратимым.

Условимся относить в дальнейшем все такие термодинамические величины, как энтропия  $S$ , внутренняя энергия  $\mathcal{E}$  и т. п. к единице объёма тела<sup>1)</sup> (а не к единице массы, как это принято в гидродинамике) и обозначать их соответствующими большими буквами.

Бесконечно малое изменение  $d\mathcal{E}$  внутренней энергии равно разности полученного данной единицей объёма тела количества тепла и произведённой силами внутренних напряжений работы  $dR$ . Количество тепла равно при обратимом процессе  $T dS$ , где  $T$ —температура. Таким образом,  $d\mathcal{E} = T dS - dR$ ; взяв  $dR$  из (3,1), получим:

$$d\mathcal{E} = T dS + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3,2)$$

Это—основное термодинамическое соотношение для деформируемых тел.

При равномерном всестороннем сжатии тензор напряжений равен  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$  (2,5). В этом случае

$$\sigma_{ik} du_{ik} = -p\delta_{ik} du_{ik} = -p du_{ii}.$$

Но мы видели (см. (1,6)), что сумма  $u_{ii}$  представляет собой относительное изменение объёма при деформировании. Если рассматривать единицу объёма, то  $u_{ii}$  будет просто изменением этого объёма, а  $du_{ii}$ —элементом  $dV$  этого изменения. Термодинамическое соотношение принимает тогда обычный вид:

$$d\mathcal{E} = T dS - p dV.$$

Вводя вместо энергии  $\mathcal{E}$  свободную энергию тела  $F = \mathcal{E} - TS$ , переписываем соотношение (3,2) в виде

$$dF = -S dT + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3,3)$$

<sup>1)</sup> По этому поводу необходимо сделать следующее замечание. Строго говоря, надо различать единицы объёма тела до и после деформирования; эти объёмы содержат, вообще говоря, различные количества вещества. Все термодинамические величины мы будем в дальнейшем всегда относить к единице объёма недеформированного тела, т. е. к заключённому в нём количеству вещества, которое после деформирования может занять несколько отличный от первоначального объём. Соответственно этому, например, полная энергия тела получается всегда интегрированием  $\mathcal{E}$  по объёму недеформированного тела.

Наконец, термодинамический потенциал  $\Phi$  тела определяется как

$$\Phi = \mathcal{E} - TS - \sigma_{ik} u_{ik} = F - \sigma_{ik} u_{ik}. \quad (3,4)$$

Это является обобщением обычного выражения  $\Phi = \mathcal{E} - TS + pV^1$ . Подставляя (3,4) в (3,3), находим:

$$d\Phi = -S dT - u_{ik} d\sigma_{ik}. \quad (3,5)$$

Независимыми переменными в (3,2) и (3,3) являются соответственно  $S$ ,  $u_{ik}$  и  $T$ ,  $u_{ik}$ . Компоненты тензора напряжений можно получить, дифференцируя  $\mathcal{E}$  или  $F$  по компонентам тензора деформаций, соответственно при постоянной энтропии  $S$  или температуре  $T$ :

$$\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}} \right)_S = \left( \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T. \quad (3,6)$$

Аналогично, дифференцируя  $\Phi$  по компонентам  $\sigma_{ik}$ , можно получить компоненты  $u_{ik}$ :

$$u_{ik} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}} \right)_T. \quad (3,7)$$

#### § 4. Закон Гука

Для того чтобы иметь возможность применять общие термодинамические соотношения к тем или иным конкретным случаям деформаций, необходимо иметь выражение для свободной энергии тела  $F$  как функции от тензора деформации. Это выражение легко получить, воспользовавшись малостью деформаций и соответственно этому разложив свободную энергию в ряд по степеням  $u_{ik}$ . При этом мы будем пока рассматривать только изотропные тела; соответствующие выражения для кристаллов будут получены ниже, в § 10.

Рассматривая деформированное тело, находящееся при некоторой (постоянной вдоль тела) температуре, мы будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при той же температуре (эта оговорка необходима ввиду теплового расширения; см. подробнее следующий параграф). Тогда при  $u_{ik} = 0$  должны отсутствовать также и внутренние напряжения, т. е. должны быть  $\sigma_{ik} = 0$ . Поскольку  $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$ , то отсюда следует, что в разложении  $F$  по степеням  $u_{ik}$  должны отсутствовать линейные члены.

Далее, поскольку свободная энергия является величиной скалярной, то и каждый член в разложении  $F$  тоже должен быть скаляром.

<sup>1)</sup> При всестороннем сжатии выражение (3,4) переходит в

$$\Phi = F + p u_{ii} = F + p(V - V_0),$$

где  $V - V_0$  — изменение объема в результате деформации. Отсюда видно, что принимаемое нами здесь определение  $\Phi$  отличается от применяемого обычно в термодинамике  $\Phi = F + pV$  членом  $-pV_0$ .

Из компонент симметрического тензора  $u_{ik}$  можно составить два независимых скаляра второй степени; в качестве них можно выбрать квадрат  $u_{ii}^2$  суммы диагональных компонент и сумму  $u_{ik}^2$  квадратов всех компонент тензора  $u_{ik}$ . Разлагая  $F$  в ряд по степеням  $u_{ik}$ , мы получим, следовательно, с точностью до членов второго порядка выражение вида

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \quad (4,1)$$

Это есть общее выражение для свободной энергии деформированного изотропного тела. Величины  $\lambda$  и  $\mu$  называются *коэффициентами Ламэ*.

Мы видели в § 1, что изменение объема при деформации определяется суммой  $u_{ii}$ . Если эта сумма равна нулю, то это значит, что при деформировании объем данного тела остаётся неизменным и меняется только его форма. Такие деформации без изменения объема называются *сдвигом*.

Обратным случаем является деформация, сопровождающаяся изменением объема, но без изменения формы. Каждый элемент объема тела при такой деформации остаётся подобным самому себе. В § 1 мы видели, что тензор такой деформации имеет вид  $u_{ik} = \text{const} \cdot \delta_{ik}$ . Такая деформация называется *всесторонним сжатием*.

Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Для этого достаточно написать тождество

$$u_{ik} = \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ii} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ii}. \quad (4,2)$$

Первый член справа представляет собой, очевидно, чистый сдвиг, поскольку сумма его диагональных членов равна нулю (напоминаем, что  $\delta_{ii} = 3$ ). Второй же член связан со всесторонним сжатием.

В качестве общего выражения для свободной энергии деформированного изотропного тела удобно написать вместо (4,1) другое, воспользовавшись указанным разложением произвольной деформации на сдвиг и всестороннее сжатие. Именно, выберем в качестве двух независимых скаляров второй степени суммы квадратов компонент соответственно первого и второго членов в (4,2). Тогда  $F$  будет иметь вид<sup>1)</sup>

$$F = \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ii} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ii}^2. \quad (4,3)$$

Величины  $K$  и  $\mu$  называются соответственно *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига*.  $K$  связано с коэффициентами

<sup>1)</sup> Постоянный член  $F_0$  — свободная энергия недеформированного тела — в дальнейшем не будет нас интересовать. Поэтому мы будем для краткости всегда опускать его, подразумевая под  $F$  одну только интересующую нас свободную энергию деформации или, как говорят, упругую свободную энергию.

Ламэ соотношением

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu. \quad (4,4)$$

В состоянии термодинамического равновесия свободная энергия, как известно, минимальна. Если на тело не действуют никакие внешние силы, то  $F$  как функция от  $u_{ik}$  должно иметь минимум при  $u_{ik} = 0$ . Это значит, что квадратичная форма (4,3) должна быть положительна. Если выбрать тензор  $u_{ik}$  таким, что  $u_{ll} = 0$ , то в (4,3) останется только первый член; если же выбрать тензор вида  $u_{ik} = \text{const} \cdot \delta_{ik}$ , то останется только второй член. Отсюда следует, что необходимым (и, очевидно, достаточным) условием положительности формы (4,3) является положительность каждого из коэффициентов  $K$  и  $\mu$ .

Таким образом, мы приходим к результату, что модули сжатия и сдвига всегда положительны:

$$K > 0, \quad \mu > 0. \quad (4,5)$$

Воспользуемся теперь общим термодинамическим соотношением (3,6) и определим с его помощью тензор напряжений. Для вычисления производных  $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$  напишем полный дифференциал  $dF$  (при постоянной температуре). Имеем:

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) d \left( u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right).$$

Во втором члене умножение первой скобки на  $\delta_{ik}$  даёт нуль, так что остаётся

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) du_{ik}$$

или, написав  $du_{ll}$  в виде  $\delta_{ik} du_{ik}$ ,

$$dF = \left[ Ku_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) \right] du_{ik}.$$

Отсюда имеем для тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right). \quad (4,6)$$

Это выражение определяет тензор напряжений через тензор деформации для изотропного тела. Из него видно, в частности, что если деформация является чистым сдвигом или чистым всесторонним сжатием, то связь между  $\sigma_{ik}$  и  $u_{ik}$  определяется соответственно одним только модулем сдвига или модулем всестороннего сжатия.

Нетрудно получить и обратные формулы, выражающие  $u_{ik}$  через  $\sigma_{ik}$ . Для этого найдём сумму диагональных членов  $\sigma_{ii}$ . Поскольку для

второго члена (4,6) эта сумма обращается в нуль, то  $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$ , или

$$u_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{ii}. \quad (4,7)$$

Подставляя это выражение в (4,6) и определяя отсюда  $u_{ik}$ , находим:

$$u_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right), \quad (4,8)$$

что и определяет тензор деформации по тензору напряжений.

Равенство (4,7) показывает, что относительное изменение объёма  $u_{ii}$  при всякой деформации изотропного тела зависит только от суммы  $\sigma_{ii}$  диагональных компонент тензора напряжений, причём связь между  $u_{ii}$  и  $\sigma_{ii}$  определяется только модулем всестороннего сжатия. При всестороннем (равномерном) сжатии тела тензор напряжений имеет вид  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ . Поэтому в этом случае имеем из (4,7):

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}. \quad (4,9)$$

Поскольку деформации малы, то  $u_{ii}$  и  $p$  — малые величины, и мы можем написать отношение  $\frac{u_{ii}}{p}$  относительного изменения объёма к давлению в дифференциальном виде  $\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ . Таким образом,

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

Величина  $1/K$  называется *коэффициентом всестороннего сжатия* (или просто коэффициентом сжатия).

Из (4,8) мы видим, что тензор деформации  $u_{ik}$  является линейной функцией тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ . Другими словами, деформация пропорциональна приложенным к телу силам. Этот закон, имеющий место для малых деформаций, называется *законом Гука*<sup>1)</sup>.

Приведём ещё полезную форму выражения для свободной энергии деформированного тела, получающуюся непосредственно из квадратичности  $F$  по тензору деформации. Согласно теореме Эйлера имеем:

$$u_{ik} \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F,$$

откуда, ввиду того, что  $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \sigma_{ik}$ ,

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2}. \quad (4,10)$$

<sup>1)</sup> Фактически закон Гука применим практически ко всем упругим деформациям. Дело в том, что деформации обычно перестают быть упругими ещё тогда, когда они настолько малы, что закон Гука является достаточно хорошим приближением (исключение представляют тела типа резины).

Если в эту формулу подставить  $u_{ik}$ , выраженные в виде линейных комбинаций компонент  $\sigma_{ik}$ , то упругая энергия будет представлена как квадратичная функция величин  $\sigma_{ik}$ . Снова применяя теорему Эйлера, будем иметь:

$$\sigma_{ik} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F,$$

и сравнение с (4,10) показывает, что

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}. \quad (4,11)$$

Следует, однако, подчеркнуть, что, в то время как формула  $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$  является общим термодинамическим соотношением, справедливость обратной формулы (4,11) связана с выполнением закона Гука.

### § 5. Однородные деформации

Рассмотрим несколько простейших случаев так называемых *однородных деформаций*, т. е. деформаций, при которых тензор деформации постоянен вдоль всего объема тела. Однородной деформацией является, например, уже рассмотренное нами равномерное всестороннее сжатие.

Рассмотрим теперь так называемое *простое растяжение* (или сжатие) стержня. Пусть стержень расположен вдоль оси  $z$  и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны. Эти силы действуют равномерно на всю поверхность концов стержня; сила, действующая на единицу поверхности, пусть будет  $p$ .

Поскольку деформация однородна, т. е.  $u_{ik}$  постоянны вдоль тела, то постоянен также и тензор напряжений  $\sigma_{ik}$ , а поэтому его можно определить непосредственно из граничных условий (2,8). На боковой поверхности стержня внешние силы отсутствуют, откуда следует, что  $\sigma_{ik}n_k = 0$ . Поскольку единичный вектор  $n$  на боковой поверхности перпендикулярен к оси  $z$ , т. е. имеет только компоненты  $n_x$ ,  $n_y$ , то отсюда следует, что все компоненты  $\sigma_{ik}$ , за исключением только  $\sigma_{zz}$ , равны нулю. На поверхности концов стержня имеем  $\sigma_{zi}n_i = p$ , откуда

$$\sigma_{zz} = p.$$

Из общего выражения (4,8), связывающего компоненты тензоров деформации и напряжений, мы видим, что все компоненты  $u_{ik}$  с  $i \neq k$  равны нулю. Для остальных компонент находим:

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p. \quad (5,1)$$

Компонента  $u_{zz}$  определяет относительное удлинение стержня вдоль оси  $z$ . Коэффициент при  $p$  называют *коэффициентом растяжения*, а обратную величину — *модулем растяжения* (или *модулем Юнга*)  $E$ :

$$u_{zz} = \frac{p}{E}, \quad (5,2)$$

где

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}. \quad (5,3)$$

Компоненты  $u_{xx}$  и  $u_{yy}$  определяют относительное сжатие стержня в поперечном направлении. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению называется *коэффициентом Пуассона*  $\sigma$ <sup>1)</sup>:

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \quad (5,4)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \quad (5,5)$$

Поскольку  $K$  и  $\mu$  всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от  $-1$  (при  $K=0$ ) до  $\frac{1}{2}$  (при  $\mu=0$ ). Таким образом<sup>2)</sup>,

$$-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (5,6)$$

Наконец, относительное увеличение объема стержня при его растяжении равно

$$u_{ii} = p \frac{1}{3K}. \quad (5,7)$$

Свободную энергию растянутого стержня можно написать, воспользовавшись непосредственно формулой (4,10). Поскольку от нуля отлична только компонента  $\sigma_{zz}$ , то  $F = \frac{1}{2} \sigma_{zz} u_{zz}$ , откуда

$$F = \frac{p^2}{2E}. \quad (5,8)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, как это обычно принято, величинами  $E$  и  $\sigma$  вместо модулей  $K$  и  $\mu$ . Обращая формулы (5,3) и

<sup>1)</sup> Обозначение коэффициента Пуассона посредством  $\sigma$ , а компонент тензора напряжений посредством  $\sigma_{ik}$  не может привести к недоразумениям, поскольку последние в отличие от первого всегда имеют индексы.

<sup>2)</sup> Фактически коэффициент Пуассона меняется только в пределах от 0 до  $\frac{1}{2}$ . В природе не известны тела, у которых было бы  $\sigma < 0$ , т. е. которые бы испытывали увеличение поперечных размеров при продольном растяжении. Укажем также, что неравенству  $\sigma > 0$  соответствует  $\lambda > 0$ , где  $\lambda$  есть коэффициент Ламэ, входящий в (4,1); другими словами, фактически всегда положительны оба члена не только в выражении (4,3), но и в (4,1), хотя это и не является необходимым с точки зрения термодинамики. Близкие к  $\frac{1}{2}$  значения  $\sigma$  (например у резины) соответствуют модулю сдвига, малому по сравнению с модулем сжатия.

(5,5), имеем<sup>1)</sup>:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \quad (5,9)$$

Выпишем здесь общие формулы предыдущего параграфа с коэффициентами, выраженными через  $E$  и  $\sigma$ . Для свободной энергии имеем:

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left( u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ii}^2 \right). \quad (5,10)$$

Тензор напряжений выражается через тензор деформации согласно

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left( u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ii} \delta_{ik} \right). \quad (5,11)$$

Обратно:

$$u_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\sigma) \sigma_{ik} - \sigma \sigma_{ii} \delta_{ik}]. \quad (5,12)$$

Поскольку формулами (5,11) и (5,12) приходится постоянно пользоваться, выпишем их здесь для удобства в расписанном по компонентам виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{xx} + \sigma (u_{yy} + u_{zz})], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{yy} + \sigma (u_{xx} + u_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{zz} + \sigma (u_{xx} + u_{yy})], \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{yz} \end{aligned} \quad (5,13)$$

и обратные формулы:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \sigma (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ u_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \\ u_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ u_{xy} &= \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xy}, \quad u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xz}, \quad u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (5,14)$$

Рассмотрим теперь сжатие стержня, боковые стороны которого закреплены так, что его поперечные размеры не могут меняться. Внешние силы, производящие сжатие стержня, приложены к его

<sup>1)</sup> Второй коэффициент Ламэ

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}.$$

основаниям и действуют вдоль его длины, которую мы опять выберем в качестве оси  $z$ . Такую деформацию называют *односторонним сжатием*. Поскольку стержень деформируется только вдоль оси  $z$ , то из всех компонент  $u_{ik}$  от нуля отлична только  $u_{zz}$ . Из (5,13) имеем теперь:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}.$$

Обозначая опять сжимающую силу посредством  $p$  ( $\sigma_{zz} = p$ ;  $p$  отрицательно при сжатии), имеем:

$$u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} p. \quad (5,15)$$

Коэффициент при  $p$  называется коэффициентом одностороннего сжатия. Для напряжений, возникающих в поперечном направлении, имеем:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (5,16)$$

Наконец, для свободной энергии стержня имеем:

$$F = p^2 \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)}. \quad (5,17)$$

## § 6. Деформации с изменением температуры

Рассмотрим теперь деформации, сопровождающиеся изменением температуры тела; изменение температуры может происходить как в результате самого процесса деформирования, так и по посторонним причинам.

Будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при некоторой заданной температуре  $T_0$ . Если тело находится при температуре  $T$ , отличной от  $T_0$ , то даже при отсутствии внешних сил оно будет, вообще говоря, деформировано в связи с наличием теплового расширения. Поэтому в разложение свободной энергии  $F(T)$  будут входить не только квадратичные, но и линейные по тензору деформации члены. Из компонент тензора второго ранга  $u_{ik}$  можно составить всего только одну линейную скалярную величину — сумму  $u_{ii}$  его диагональных компонент. Далее мы будем предполагать, что сопровождающее деформацию изменение  $T - T_0$  температуры мало. Тогда можно считать, что коэффициент при  $u_{ii}$  в разложении  $F$  (который должен обращаться в нуль при  $T = T_0$ ) просто пропорционален разности  $T - T_0$ . Таким образом, получим для свободной энергии следующую формулу (заменяющую (4,3)):

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0) u_{ii} + \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ii} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ii}^2, \quad (6,1)$$

где коэффициент при  $T - T_0$  написан в виде  $-K\alpha$ . Величины  $\mu$ ,  $K$ ,  $\alpha$  надо считать здесь постоянными; учёт их зависимости от температуры привёл бы к величинам высшего порядка малости.

Дифференцируя  $F$  по  $u_{ik}$ , получим тензор напряжений. Имеем:

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{il}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right). \quad (6,2)$$

Первый член здесь представляет собой дополнительные напряжения, связанные с изменением температуры тела. При свободном тепловом расширении тела (при отсутствии внешних сил) внутренние напряжения должны отсутствовать. Приравнявая  $\sigma_{ik}$  нулю, найдём; что  $u_{ik}$  имеет вид  $\text{const} \cdot \delta_{ik}$ , причём

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \quad (6,3)$$

Но  $u_{ll}$  представляет собой относительное изменение объёма при деформации. Таким образом,  $\alpha$  является не чем иным, как *коэффициентом теплового расширения* тела.

Среди различных (в термодинамическом смысле) типов деформаций существенны изотермические и адиабатические деформации. При изотермических деформациях температура тела не меняется. Соответственно этому в (6,1) надо положить  $T = T_0$ , и мы возвращаемся к обычным формулам; коэффициенты  $K$  и  $\mu$  можно поэтому назвать *изотермическими модулями*.

Адиабатическими являются деформации, при которых не происходит обмена теплом между различными участками тела, а также, конечно, и между телом и окружающей средой. Энтропия  $S$  остаётся при этом постоянной. Как известно, энтропия равна производной  $-\frac{\partial F}{\partial T}$  от свободной энергии по температуре. Дифференцируя выражение (6,1), находим с точностью до членов первого порядка по  $u_{ik}$

$$S(T) = S_0(T) + K\alpha u_{ll}. \quad (6,4)$$

Приравнявая  $S$  постоянной, можно было бы определить изменение  $T - T_0$  температуры при деформации, которое оказалось бы, таким образом, пропорциональным  $u_{ll}$ . Подставляя это выражение для  $T - T_0$  в (6,2), мы получили бы для  $\sigma_{ik}$  выражение обычного типа

$$\sigma_{ik} = K_{ад}u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) \quad (6,5)$$

с тем же модулем сдвига  $\mu$ , но с другим модулем сжатия  $K_{ад}$ . Связь адиабатического модуля  $K_{ад}$  с обычным, изотермическим, модулем  $K$  можно, однако, найти и без этого вычисления, непосредственно с помощью известной термодинамической формулы

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{C_p}$$

( $C_p$  — теплоёмкость при постоянном давлении, отнесённая к единице объёма тела). Если понимать под  $V$  объём, занимаемый веществом, находившимся до деформации в единице объёма тела, то производные  $\frac{\partial V}{\partial T}$  и  $\frac{\partial V}{\partial p}$  определяют относительные изменения объёма соответственно при нагревании и при сжатии. Другими словами,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{1}{K_{ад}}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{K}.$$

Таким образом, получаем для связи между адиабатическими и изотермическими модулями:

$$\frac{1}{K_{ад}} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^2}{C_p}, \quad \mu_{ад} = \mu. \quad (6,6)$$

Для *адиабатических* модуля растяжения и коэффициента Пуассона легко получаем следующие соотношения:

$$E_{ад} = \frac{E}{1 - E\frac{T\alpha^2}{9C_p}}, \quad \sigma_{ад} = \frac{\sigma + E\frac{T\alpha^2}{9C_p}}{1 - E\frac{T\alpha^2}{9C_p}}. \quad (6,7)$$

В реальных случаях величина  $\frac{ET\alpha^2}{9C_p}$  обычно мала, и потому с достаточной точностью можно написать:

$$E_{ад} = E + E^2\frac{T\alpha^2}{9C_p}, \quad \sigma_{ад} = \sigma + (1 + \sigma)E\frac{T\alpha^2}{9C_p}. \quad (6,8)$$

При изотермической деформации тензор напряжений выражается в виде производных от свободной энергии:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T.$$

При постоянной же энтропии надо написать (см. (3,6)):

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S,$$

где  $\mathcal{E}$  — внутренняя энергия. Соответственно этому при адиабатических деформациях выражение, аналогичное (4,3), определяет не свободную энергию, а просто внутреннюю энергию единицы объёма тела:

$$\mathcal{E} = \frac{K_{ад}}{2}u_{ll}^2 + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)^2. \quad (6,9)$$



### § 7. Уравнения равновесия изотропных тел

Выведем теперь уравнения равновесия изотропных твёрдых тел. Для этого надо подставить в общие уравнения (2,7)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

выражение (5,11) для тензора напряжений. Имеем:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ii}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}.$$

Подставляя сюда  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ , получим уравнения равновесия в виде

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} + \rho g_i = 0. \quad (7,1)$$

Эти уравнения удобно переписать в векторных обозначениях. В этих обозначениях величины  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$  являются компонентами вектора  $\Delta \mathbf{u}$ ,

а  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv \text{div } \mathbf{u}$ . Таким образом, уравнения равновесия приобретают вид

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = -\rho \mathbf{g} \frac{2(1+\sigma)}{E}. \quad (7,2)$$

Иногда бывает удобным писать это уравнение в несколько ином виде, воспользовавшись известной формулой векторного анализа:

$$\text{grad div } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}.$$

Тогда (7,2) приобретает вид

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = -\rho \mathbf{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \quad (7,3)$$

Мы пишем уравнения равновесия в однородном поле сил тяжести, имея в виду, что последние являются наиболее обычными в теории упругости «объёмными» силами. При наличии каких-либо иных объёмных сил вектор  $\rho \mathbf{g}$  в правой стороне уравнения должен быть заменён соответствующей другой «плотностью» объёмных сил.

Наиболее существен случай, когда деформация вызывается не объёмными силами, а силами, приложенными к поверхности тела. Тогда уравнение равновесия гласит:

$$(1-2\sigma) \Delta \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u} = 0 \quad (7,4)$$

или в другом виде

$$2(1-\sigma) \text{grad div } \mathbf{u} - (1-2\sigma) \text{rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (7,5)$$

Внешние силы входят в решение только через посредство граничных условий.

Применяя к уравнению (7,4) операцию  $\text{div}$  и помня, что  $\text{div grad} \equiv \Delta$ , находим:

$$\Delta \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (7,6)$$

т. е. величина  $\text{div } \mathbf{u}$  (определяющая изменение объёма при деформации) является гармонической функцией. Применяя же к уравнению (7,4) оператор Лапласа  $\Delta$ , получим теперь:

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (7,7)$$

т. е. в равновесии вектор деформации удовлетворяет так называемому *бигармоническому уравнению*. Эти результаты остаются в силе и в однородном поле тяжести (при операциях дифференцирования правая сторона уравнения (7,2) исчезает), но они не справедливы в общем случае переменных вдоль тела объёмных внешних сил.

Тот факт, что вектор деформации удовлетворяет бигармоническому уравнению, не означает, разумеется, что общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объёмных сил) есть произвольная бигармоническая векторная функция; следует помнить, что функция  $\mathbf{u}(x, y, z)$  должна в действительности удовлетворять ещё и дифференциальному уравнению более низкого порядка (7,4). В то же время оказывается возможным выразить общий интеграл уравнений равновесия через производные от произвольного бигармонического вектора (см. задачу 10).

Если тело неравномерно нагрето, то в уравнении равновесия должен быть добавлен дополнительный член. В тензоре напряжений должен быть учтён член  $-K\alpha(T-T_0)\delta_{ik}$  (см. (6.2)) и соответственно в  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  возникает член

$$-K\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

В результате получаем уравнения равновесия в виде

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = \alpha \nabla T. \quad (7,8)$$

Остановимся на частном случае так называемой *плоской деформации*, при которой во всём теле одна из компонент вектора смещения равна нулю ( $u_z = 0$ ), а компоненты  $u_x, u_y$  зависят только от  $x, y$ . При этом тождественно обращаются в нуль компоненты  $u_{zz}, u_{xz}, u_{yz}$  тензора деформации, а с ними и компоненты  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  тензора напряжений (но не продольное напряжение  $\sigma_{zz}$ , существо-

вание которого должно обеспечить постоянство длины тела вдоль оси  $z$ )<sup>1)</sup>.

Поскольку все величины не зависят от координаты  $z$ , то уравнения равновесия (при отсутствии внешних объёмных сил)  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  сводятся в данном случае к двум уравнениям:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (7,9)$$

Наиболее общим видом функций  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$ , удовлетворяющих этим уравнениям, является

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (7,10)$$

где  $\chi$  — произвольная функция от  $x$  и  $y$ . Легко получить уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Такое уравнение должно существовать в силу того, что три величины  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  выражаются в действительности всего через две величины  $u_x$ ,  $u_y$  и потому не являются независимыми. С помощью формул (5,13) найдём для плоской деформации:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}).$$

Но

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta \chi, \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u},$$

и поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  есть согласно (7,6) гармоническая функция, то мы заключаем, что функция  $\chi$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \chi = 0, \quad (7,11)$$

т. е. является бигармонической. Функцию  $\chi$  называют *функцией напряжений*. После того как плоская задача решена и функция  $\chi$  известна, продольное напряжение  $\sigma_{zz}$  определяется непосредственно по формуле

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}) = \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

или

$$\sigma_{zz} = \sigma \Delta \chi. \quad (7,12)$$

<sup>1)</sup> Весьма эффективные методы решения плоских задач теории упругости связаны с применением теории функций комплексного переменного. См. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи теории упругости, Изд. АН СССР, 1954.

### Задачи

1. Определить деформацию длинного стержня (длины  $l$ ), стоящего вертикально в поле тяжести.

Решение. Направляем ось  $z$  по оси стержня, а плоскость  $x$ ,  $y$  — в плоскости его нижнего основания. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

На боковой поверхности стержня должны обращаться в нуль все компоненты  $\sigma_{ik}$ , кроме  $\sigma_{zz}$ , а на верхнем ( $z=l$ ) основании  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ . Удовлетворяющее этим условиям решение уравнений равновесия есть

$\sigma_{zz} = -\rho g(l-z)$ , а все остальные  $\sigma_{ik} = 0$ . По  $\sigma_{ik}$  определяем  $u_{ik}$  в виде

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g(l-z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0,$$

а отсюда интегрированием — компоненты вектора деформации

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z)x, \\ u_y &= \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z)y, \\ u_z &= -\frac{\rho g}{2E} \{l^2 - (l-z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}. \end{aligned}$$

Выражение для  $u_z$  удовлетворяет граничному условию  $u_z = 0$  только в одной точке нижней поверхности стержня. Поэтому полученное решение неприменимо вблизи нижнего конца стержня.

2. Определить деформацию полого шара (наружный и внутренний радиусы  $R_2$  и  $R_1$ ), внутри которого действует давление  $p_1$ ; давление снаружи  $p_2$ .

Решение. Вводим сферические координаты с началом в центре шара. Деформация  $\mathbf{u}$  направлена везде по радиусу и является функцией только от  $r$ . Поэтому  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ , и уравнение (7,5) приобретает вид

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \operatorname{const} \equiv 3a,$$

или

$$u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Компоненты тензора деформации (см. формулы (1,7)):

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}.$$

Радиальное напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Постоянные  $a$  и  $b$  определяются из граничных условий:  $\sigma_{rr} = -p_1$  при  $r=R_1$  и  $\sigma_{rr} = -p_2$  при  $r=R_2$ . Отсюда находим:

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Так, распределение напряжений по толщине шарового слоя, внутри которого действует давление  $p_1=p$ , а снаружи  $p_2=0$ , даётся формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( 1 - \frac{R_2^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( 1 + \frac{R_2^3}{r^3} \right).$$

Для тонкой сферической оболочки толщины  $h = R_2 - R_1 \ll R$  имеем приближённо:

$$u = \frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{p}{2}$$

( $\bar{\sigma}_{rr}$  — среднее по толщине оболочки значение радиального напряжения).

Распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шарообразной полостью (радиуса  $R$ ), подвергаемой равномерному всестороннему сжатию, получим, положив  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = p$ :

$$\sigma_{rr} = -p \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

На границе полости тангенциальные напряжения  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3p}{2}$ , т. е. превышают давление на бесконечности.

3. Определить деформацию сплошной сферы (радиуса  $R$ ) под влиянием собственного гравитационного поля.

Решение. Сила тяготения, действующая на единицу массы сферического тела, равна  $-g \frac{r}{R}$ . Подставив это выражение вместо  $g$  в уравнение (7,3), получим для радиального смещения следующее уравнение:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

Решение, конечное при  $r=0$  и удовлетворяющее условию  $\sigma_{rr}=0$  при  $r=R$ , есть

$$u = -\frac{gQR(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left[ \frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right].$$

Отметим, что внутри сферической поверхности радиуса  $R \sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$  вещество сжато ( $u_{rr} < 0$ ), а вне её — растянуто ( $u_{rr} > 0$ ). Давление в центре шара оказывается равным

$$\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} gQR.$$

4. Определить деформацию полой цилиндрической трубы (наружный и внутренний радиусы  $R_2$  и  $R_1$ ), внутри которой действует давление  $p$ ; давление снаружи отсутствует<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В задачах 4, 5, 7 предполагается, что цилиндры удерживаются при постоянной длине, так что продольная деформация отсутствует.

Решение. Вводим цилиндрические координаты с осью  $z$  по оси трубы. При однородном вдоль трубы давлении деформация представляет собой чисто радиальное смещение  $u_r = u(r)$ . Аналогично задаче 2 имеем теперь:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = \operatorname{const} \equiv 2a.$$

Отсюда

$$u = ar + \frac{b}{r}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформации (см. формулы (1,8)):

$$u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}.$$

Из условий  $\sigma_{rr}=0$  при  $r=R_2$  и  $\sigma_{rr}=-p$  при  $r=R_1$  находим:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1+\sigma}{E}.$$

Распределение напряжений по толщине трубы даётся формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси.

Решение. Написав в (7,3) центробежную силу  $\rho\Omega^2 r$  вместо силы тяжести ( $\Omega$  — угловая скорость), получаем в цилиндрических координатах для смещения  $u_r = u(r)$  уравнение

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) = -\rho\Omega^2 r.$$

Решение, конечное при  $r=0$  и удовлетворяющее условию  $\sigma_{rr}=0$  при  $r=R$ , есть

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r [(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

6. Определить деформацию неравномерно нагретого шара со сферически симметричным распределением температуры.

Решение. В сферических координатах уравнение (7,8) для чисто радиальной деформации гласит:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \frac{dT}{dr}.$$

Решение, конечное при  $r=0$  и удовлетворяющее условию  $\sigma_{rr}=0$  при  $r=R$ , есть

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r^2 dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \frac{r}{R^3} \int_0^R T(r) r^2 dr \right\}.$$

Температура  $T(r)$  отсчитывается от того значения, при котором равномерно нагретый шар считается недеформированным. В качестве этой температуры здесь выбрана температура внешней поверхности шара, так что  $T(R)=0$ .

7. То же для неравномерно нагретого цилиндра с аксиально-симметричным распределением температуры.

Решение. Аналогичным путём в цилиндрических координатах получаем:

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r) r dr + (1-2\sigma) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r) r dr \right\}.$$

8. Определить деформацию неограниченной упругой среды с заданным распределением температуры  $T(x, y, z)$ , таким, что на бесконечности температура стремится к постоянному значению  $T_0$  и деформация отсутствует.

Решение. Уравнение (7,8) имеет очевидно решение, в котором

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} [T(x, y, z) - T_0].$$

Вектор  $\mathbf{u}$ , дивергенция которого равна заданной функции, определённой во всём пространстве и обращающейся в нуль на бесконечности, а ротор которого тождественно исчезает, может быть написан, как известно из векторного анализа, в виде

$$\mathbf{u}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{u}(x', y', z')}{r} dV',$$

где  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ . Поэтому получаем общее решение поставленной задачи в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)} \nabla \int \frac{T' - T_0}{r} dV', \quad (1)$$

где  $T' \equiv T(x', y', z')$ .

Если в очень малом участке объёма неограниченной среды (в начале координат) выделяется конечное количество тепла  $q$ , то распределение температуры можно написать в виде ( $C$ —теплоёмкость среды)

$$T - T_0 = \frac{q}{C} \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

где  $\delta$  обозначает  $\delta$ -функцию. Интеграл в (1) равен тогда  $\frac{q}{Cr}$ , и деформация даётся формулой

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha(1+\sigma)q}{12\pi(1-\sigma)C} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

9. Вывести уравнения равновесия изотропного тела (при отсутствии объёмных сил), выраженные через компоненты тензора напряжений.

Решение. Искомая система уравнений содержит наряду с тремя уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (1)$$

еще уравнения, являющиеся следствием того факта, что шесть различных компонент  $u_{ik}$  не являются независимыми величинами. Для вывода этих уравнений пишем сначала систему дифференциальных соотношений, которым удовлетворяют компоненты тензора  $u_{ik}$ . Легко видеть, что величины

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

тождественно удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_l \partial x_i}.$$

Здесь имеется всего шесть существенно различных соотношений (соответствующих значениям  $i, k, l, m$ : 1122, 1133, 2233, 1123, 2213, 3312); мы сохраним их все, упростив написанное тензорное равенство по индексам  $l, m$ :

$$\Delta u_{ik} + \frac{\partial^2 u_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_l}. \quad (2)$$

Подставляя сюда  $u_{ik}$ , выраженное через  $\sigma_{ik}$  согласно (5,12), и учитывая (1), получим искомые уравнения:

$$(1+\sigma) \Delta \sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (3)$$

Эти уравнения остаются в силе и при наличии постоянных вдоль тела внешних объёмных сил.

Упростив уравнение (3) по индексам  $i, k$ , найдём, что

$$\Delta \sigma_{ll} = 0,$$

т. е.  $\sigma_{ll}$ —гармоническая функция. Применив же теперь к этому уравнению операцию  $\Delta$ , найдём, что

$$\Delta \Delta \sigma_{ik} = 0,$$

т. е. компоненты  $\sigma_{ik}$ —бигармонические функции; эти результаты следуют, впрочем, уже непосредственно из (7,6) и (7,7) ввиду линейной связи между  $\sigma_{ik}$  и  $u_{ik}$ .

10. Выразить общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объёмных сил) через произвольный бигармонический вектор (Б. Г. Галёркин, 1930).

Решение. Естественно искать решение уравнения (7,4) в виде

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f} + A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

Отсюда  $\operatorname{div} \mathbf{u} = (1+A) \operatorname{div} \Delta \mathbf{f}$ . Подставляя это в (7,4), получим:

$$(1-2\sigma) \Delta \Delta \mathbf{f} + [2(1-\sigma)A+1] \operatorname{grad} \operatorname{div} \Delta \mathbf{f} = 0.$$

Отсюда видно, что если  $\mathbf{f}$ —произвольный бигармонический вектор

$$\Delta \Delta \mathbf{f} = 0,$$

то

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

11. Выразить напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$  при плоской деформации (в полярных координатах  $r, \varphi$ ) в виде производных от функции напряжений.

Решение. Поскольку искомые выражения не могут зависеть от выбора начала отсчёта полярного угла  $\varphi$ , то они не содержат его явным образом. Поэтому можно применить следующий приём: преобразуем декартовы производные (7,10) в производные по переменным  $r, \varphi$ , после чего замечаем, что

$$\sigma_{rr} = (\sigma_{xx})_{\varphi=0}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = (\sigma_{yy})_{\varphi=0}, \quad \sigma_{r\varphi} = (\sigma_{xy})_{\varphi=0}$$

(угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$ ). Таким образом, получим:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right).$$

12. Определить распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шаровой полостью, подвергаемой (на бесконечности) однородной деформации.

Решение. Общая однородная деформация может быть представлена в виде наложения однородного всестороннего растяжения (или сжатия) и однородного сдвига. Первое было рассмотрено в задаче 2, так что достаточно рассмотреть однородный сдвиг.

Пусть  $\sigma_{ik}^{(0)}$  — однородное поле напряжений, которое имело бы место во всём пространстве при отсутствии полости; при чистом сдвиге  $\sigma_{ii}^{(0)} = 0$ . Соответствующий вектор смещения обозначаем как  $u^{(0)}$  и ищем искомое решение в виде  $u = u^{(0)} + u^{(1)}$ , где обусловленная наличием полости функция  $u^{(1)}$  исчезает на бесконечности.

Всякое решение бигармонического уравнения может быть написано в виде линейной комбинации центрально-симметрических решений и их производных различных порядков по координатам. Независимыми центрально-симметрическими решениями являются  $r^2$ ,  $r$ ,  $\frac{1}{r}$ , 1. Поэтому наиболее общий вид, который может иметь бигармонический вектор  $u^{(1)}$ , зависящий, как от параметров, только от компонент постоянного тензора  $\sigma_{ik}^{(0)}$  и обращающийся в нуль на бесконечности, есть

$$u_i^{(1)} = A \sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} + B \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{1}{r} + C \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} r. \quad (1)$$

Подставив это выражение в уравнение (7,4), получим:

$$(1-2\sigma) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = [2(1-2\sigma)C + (A+2C)] \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{1}{r} = 0,$$

откуда

$$A = -4C(1-\sigma).$$

Ещё два соотношения между постоянными  $A$ ,  $B$ ,  $C$  получаются из условия на границе полости:  $(\sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)}) n_k = 0$  при  $r = R$  ( $R$  — радиус полости, начало координат выбрано в её центре,  $n$  — единичный вектор в направлении  $r$ ). Довольно длинное вычисление с помощью (1) приводит к следующим значениям:

$$B = \frac{CR^2}{5}, \quad C = \frac{5R^3(1+\sigma)}{2E(7-5\sigma)}.$$

Окончательное выражение для распределения напряжений гласит:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} & \left[ 1 + \frac{5(1-2\sigma)}{7-5\sigma} \left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{3}{7-5\sigma} \left(\frac{R}{r}\right)^5 \right] + \\ & + \frac{15}{7-5\sigma} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[ \sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] (\sigma_{il}^{(0)} n_k n_l + \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \\ & + \frac{15}{2(7-5\sigma)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[ -5 + 7 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k + \\ & + \frac{15}{2(7-5\sigma)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[ 1 - 2\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \delta_{ik} \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m \end{aligned}$$

Для того чтобы получить распределение напряжений при произвольных (не чисто сдвиговых)  $\sigma_{ik}^{(0)}$ , надо заменить в этом выражении  $\sigma_{ik}^{(0)}$  на  $\sigma_{ik}^{(0)} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll}^{(0)}$  и прибавить выражение

$$\frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(0)} \left[ \delta_{ik} + \frac{R^3}{2r^3} (\delta_{ik} - 3n_i n_k) \right],$$

соответствующее равномерному однородному растяжению на бесконечности (ср. задачу 2). Выпишем здесь результат, получающийся в общем случае для напряжений на границе полости:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = \frac{15}{7-5\sigma} & \left\{ (1-\sigma) (\sigma_{ik}^{(0)} - \sigma_{il}^{(0)} n_i n_k - \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k - \right. \\ & \left. - \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m \delta_{ik} + \frac{5\sigma-1}{10} \sigma_{ll}^{(0)} (\delta_{ik} - n_i n_k) \right\}. \end{aligned}$$

Вблизи отверстия напряжения значительно превышают напряжения на бесконечности, причём это увеличение напряжений имеет резко выраженный местный характер, быстро убывая с расстоянием (так называемая концентрация напряжений у отверстия). Так, если среда подвергается простому однородному растяжению (отлично от нуля только  $\sigma_{zz}^{(0)}$ ), то наибольшие напряжения будут иметь место на экваторе полости, причём здесь

$$\sigma_{zz} = \frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)} \sigma_{zz}^{(0)}.$$

## § 8. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Рассмотрим упругую среду, заполняющую бесконечное полупространство, т. е. ограниченную с одной стороны бесконечной плоскостью. Определим деформацию среды под влиянием сил, приложенных к её свободной поверхности<sup>1)</sup>. Распределение этих сил должно удовлетворять только одному условию: они должны исчезать на бесконечности так, чтобы на бесконечности деформация отсутствовала. Для такого случая уравнения равновесия могут быть проинтегрированы в общем виде.

Во всём объёме, занимаемом средой, имеет место уравнение равновесия (7,4):

$$\text{grad div } u + (1-2\sigma) \Delta u = 0. \quad (8,1)$$

<sup>1)</sup> Наиболее прямой и стандартный метод решения поставленной задачи заключается в применении к уравнению (8,1) метода Фурье. При этом, однако, приходится вычислять довольно сложные интегралы. Излагаемый ниже метод, основанный на применении ряда искусственных приёмов, связан с более простыми вычислениями.

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla\varphi, \quad (8,2)$$

где  $\varphi$  есть некоторый скаляр, а вектор  $\mathbf{f}$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (8,3)$$

Подстановка (8,2) в (8,1) приводит тогда к следующему уравнению для  $\varphi$ :

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{f}. \quad (8,4)$$

Выберем свободную поверхность упругой среды в качестве плоскости  $x, y$ ; области среды соответствуют положительные  $z$ . Напишем функции  $f_x$  и  $f_y$  в виде производных по  $z$  от некоторых функций  $g_x$  и  $g_y$ :

$$f_x = \frac{\partial g_x}{\partial z}, \quad f_y = \frac{\partial g_y}{\partial z}. \quad (8,5)$$

Поскольку  $f_x$  и  $f_y$  являются гармоническими функциями, то можно всегда выбрать функции  $g_x, g_y$  так, чтобы и они удовлетворяли уравнению Лапласа:

$$\Delta g_x = 0, \quad \Delta g_y = 0. \quad (8,6)$$

Уравнение (8,4) принимает теперь вид

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z\right).$$

Имея в виду, что  $g_x, g_y, f_z$  — гармонические функции, легко убедиться в том, что удовлетворяющая этому уравнению функция  $\varphi$  может быть написана как

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}\left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \psi, \quad (8,7)$$

где  $\psi$  — опять гармоническая функция:

$$\Delta\psi = 0. \quad (8,8)$$

Таким образом, задача об определении деформации  $\mathbf{u}$  сведена к нахождению функций  $g_x, g_y, f_z, \psi$ , которые все удовлетворяют уравнению Лапласа.

Выпишем теперь граничные условия, которые должны выполняться на свободной поверхности среды (на плоскости  $z=0$ ).

Поскольку единичный вектор внешней нормали  $\mathbf{n}$  направлен в отрицательном направлении оси  $z$ , то согласно общей формуле (2,8) должно быть  $\sigma_{iz} = -P_i$ . Воспользовавшись для  $\sigma_{ik}$  общим выражением (5,11) и выражая компоненты вектора  $\mathbf{u}$  через вспомогательные величины  $g_x, g_y, f_z, \psi$ , получим после простого

вычисления граничные условия в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_x, \quad (8,9)$$

$$\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_y,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_z. \quad (8,10)$$

Компоненты  $P_x, P_y, P_z$  внешних сил, приложенных к поверхности, являются заданными функциями координат  $x, y$ , обращающимися в нуль на бесконечности.

Формулы, с помощью которых введены вспомогательные величины  $g_x, g_y, f_z, \psi$ , не определяют их вполне однозначным образом; в их выборе остаётся ещё некоторый произвол. Поэтому мы можем наложить на эти величины ещё какое-либо произвольное дополнительное условие. В качестве такового удобно потребовать обращения в нуль величины, стоящей в фигурных скобках в уравнениях (8,9)<sup>1)</sup>:

$$(1-2\sigma)f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 4(1-\sigma)\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (8,11)$$

Тогда условия (8,9) упрощаются и дают

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_x, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}P_y. \quad (8,12)$$

Уравнения (8,10) — (8,12) достаточны для полного вычисления гармонических функций  $g_x, g_y, f_z, \psi$ .

Для упрощения записи дальнейших формул мы рассмотрим случай, когда на свободную поверхность упругого полупространства действует *сосредоточенная* сила  $\mathbf{F}$ , т. е. сила, приложенная к весьма малому участку поверхности, который можно считать точечным. Действие этой силы может быть описано как действие поверхностных сил, распределённых по закону

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\delta(x)\delta(y),$$

где  $\delta$  обозначает  $\delta$ -функцию, а начало координат выбрано в точке приложения силы. Зная решение задачи для сосредоточенной силы,

<sup>1)</sup> Мы не доказываем здесь возможности наложения такого условия: она будет явствовать из того, что в результате мы не придём ни к каким противоречиям.

мы можем непосредственно построить решение для произвольного распределения сил  $\mathbf{P}(x, y)$ . Именно, если

$$u_i = G_{ik}(x, y, z) F_k \quad (8,13)$$

есть деформация под действием сосредоточенной силы  $F$ , приложенной в начале координат, то деформация под действием сил  $\mathbf{P}(x, y)$  даётся интегралом<sup>1)</sup>

$$u_i = \iint G_{ik}(x-x', y-y', z) P_k(x', y') dx' dy'. \quad (8,14)$$

Из теории потенциала известно, что гармоническая функция  $f$ , обращающаяся на бесконечности в нуль и обладающая заданной нормальной производной  $\frac{\partial f}{\partial z}$  на плоскости  $z=0$ , определяется формулой

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint \left. \frac{\partial f(x', y', z)}{\partial z} \right|_{z=0} \frac{dx' dy'}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}.$$

Поскольку величины  $\frac{\partial g_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial g_y}{\partial z}$  и величина, стоящая в фигурных скобках в уравнении (8,10), удовлетворяют уравнению Лапласа, а равенства (8,10) и (8,12) как раз определяют значения их нормальных производных на плоскости  $z=0$ , то имеем:

$$f_z - \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_z}{r}, \quad (8,15)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_x}{r}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_y}{r}, \quad (8,16)$$

где теперь  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

В выражения для компонент искомого вектора  $\mathbf{u}$  входят не самые величины  $g_x$ ,  $g_y$ , а только их производные по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для вычисления  $\frac{\partial g_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g_y}{\partial y}$  дифференцируем равенства (8,16) соответственно по  $x$  и по  $y$ :

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_x x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_y y}{r^3}.$$

Интегрируя теперь по  $dz$  в пределах от  $\infty$  до  $z$ , получим:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_x x}{r(r+z)},$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_y y}{r(r+z)}. \quad (8,17)$$

<sup>1)</sup> Согласно математической терминологии  $G_{ik}$  есть тензор Грина для уравнений равновесия полубесконечной среды.

Мы не станем производить здесь дальнейших простых, но довольно громоздких вычислений. Из уравнений (8,11), (8,15) и (8,17) определяем  $f_z$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ . Зная  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ , легко вычислить  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ , интегрируя сначала по  $z$ , а затем дифференцируя по  $x$  и по  $y$ . Так мы получим все величины, нужные для вычисления вектора деформации согласно (8,2), (8,5), (8,7). В результате имеем следующие окончательные формулы:

$$u_x = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_x + \right.$$

$$\left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) \right\},$$

$$u_y = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_y + \right.$$

$$\left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \quad (8,18)$$

$$u_z = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{2(1-\sigma)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z + \left[ \frac{1-2\sigma}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3} \right] (xF_x + yF_y) \right\}.$$

В частности, смещение точек самой свободной поверхности среды даётся формулами, получающимися отсюда при  $z=0$ :

$$u_x = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)x}{r} F_z + 2(1-\sigma) F_x + \frac{2\sigma x}{r^2} (xF_x + yF_y) \right\},$$

$$u_y = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)y}{r} F_z + 2(1-\sigma) F_y + \frac{2\sigma y}{r^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \quad (8,19)$$

$$u_z = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ 2(1-\sigma) F_z + (1-2\sigma) \frac{1}{r} (xF_x + yF_y) \right\}.$$

### Задача

Определить деформацию неограниченной упругой среды, к малому участку которой приложена сила  $\mathbf{F}^1$ .

Решение. Рассматривая деформацию на расстояниях  $r$ , больших по сравнению с размерами участка приложения силы, мы можем считать, что сила приложена в точке. Уравнение равновесия гласит (ср. (7,2)):

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F} \delta(r) \quad (1)$$

(где  $\delta(r) \equiv \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ , а начало координат выбрано в точке приложения силы). Ищем решение в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ , где  $\mathbf{u}_0$  удовлетворяет уравнению типа Пуассона:

$$\Delta \mathbf{u}_0 = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F} \delta(r). \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Аналогичная задача для произвольной неограниченной анизотропной среды решена И. М. Лифшицем и Л. Н. Розенцвейгом (ЖЭТФ 17, 783, 1947).

Соответственно для  $u_1$  получим уравнение

$$\nabla \operatorname{div} u_1 + (1 - 2\sigma) \Delta u_1 = -\nabla \operatorname{div} u_0 \quad (3)$$

Обращающееся на бесконечности в нуль решение уравнения (2) есть

$$u_0 = \frac{1 + \sigma}{2\pi E} \frac{F}{r}.$$

Применив к уравнению (3) операцию  $\operatorname{rot}$ , получим  $\Delta \operatorname{rot} u_1 = 0$ . На бесконечности должно быть  $\operatorname{rot} u_1 = 0$ . Но функция, гармоническая во всём пространстве и обращающаяся в нуль на бесконечности, равна нулю тождественно. Таким образом,  $\operatorname{rot} u_1 = 0$  и соответственно этому можно писать  $u_1$  в виде  $u_1 = \operatorname{grad} \varphi$ . Из (3) получаем:

$$\nabla \{2(1 - \sigma) \Delta \varphi + \operatorname{div} u_0\} = 0.$$

Отсюда следует, что стоящая в скобках величина есть постоянная, и поскольку она должна исчезать на бесконечности, то во всём пространстве

$$\Delta \varphi = -\frac{\operatorname{div} u_0}{2(1 - \sigma)} = -\frac{1 + \sigma}{4\pi E(1 - \sigma)} F \nabla \frac{1}{r}.$$

Если  $\varphi$  есть решение уравнения  $\Delta \varphi = \frac{1}{r}$ , то

$$\varphi = -\frac{1 + \sigma}{4\pi E(1 - \sigma)} F \nabla \psi.$$

Выбрав не имеющее особенностей решение  $\psi = \frac{r}{2}$ , получим:

$$u_1 = \nabla \varphi = \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} \frac{(Fn)n - F}{r},$$

где  $n$  — единичный вектор в направлении радиус-вектора  $r$ . Окончательно имеем:

$$u = \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} \frac{(3 - 4\sigma)F + n(nF)}{r}.$$

Представив эту формулу в виде (8,13), мы получим тензор Грина уравнений равновесия неограниченной изотропной среды<sup>1)</sup>:

$$G_{ik} = \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} \left[ (3 - 4\sigma) \delta_{ik} + n_i n_k \right] \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi \mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1 - \sigma)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} r \right].$$

<sup>1)</sup> Тот факт, что компоненты тензора  $G_{ik}$  — однородные функции первого порядка от координат  $x, y, z$ , заранее очевиден из соображений однородности в связи с видом уравнения (1), в левой стороне которого стоит линейная комбинация вторых производных от компонент вектора  $u$ , а в правой — однородная функция третьего порядка ( $\delta(ar) = a^{-3} \delta(r)$ ).

Это свойство остаётся и в общем случае произвольной анизотропной среды.

## § 9. Соприкосновение твёрдых тел

Пусть два твёрдых тела соприкасаются друг с другом в точке, не являющейся особой точкой их поверхностей (на рис. 1, а изображён разрез через обе поверхности вблизи точки соприкосновения  $O$ ). В этой точке обе поверхности имеют общую касательную плоскость, которую мы выберем в качестве плоскости  $x, y$ . Положительное же направление оси  $z$  условимся считать различным для обоих тел, — для каждого из них будем отсчитывать  $z$ -координату по направлению в глубь тела, обозначая её соответственно как  $z$  и  $z'$ .

Как известно, вблизи обычной точки касания координатной плоскости (плоскости  $x, y$ ) уравнение поверхности может быть написано в виде

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (9,1)$$

где по дважды повторяющимся индексам  $\alpha, \beta$  подразумевается суммирование по значениям 1, 2 ( $x_1 = x, x_2 = y$ ), а  $\kappa_{\alpha\beta}$  есть двухмерный симметрический тензор, характеризующий кривизну поверхности (главные значения тензора  $\kappa_{\alpha\beta}$  равны  $\frac{1}{2R_1}$  и  $\frac{1}{2R_2}$ , где  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности в точке касания). Аналогичное соотношение для поверхности второго тела вблизи точки соприкосновения напишем в виде

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta. \quad (9,2)$$

Предположим теперь, что оба тела сдавливаются приложенными к ним силами, в результате чего они сближаются на некоторое малое расстояние  $h$ <sup>1)</sup>.

Тогда вблизи точки первоначального соприкосновения на поверхности тел возникает вдавление, и тела будут соприкасаться уже не в одной точке, а по некоторому малому, но конечному участку их поверхности. Пусть  $u_z$  и  $u'_z$  — компоненты (соответственно по осям  $z$  и  $z'$ ) векторов смещения точек поверхностей обоих тел при сдавливании. На рис. 1, б пунктиром изображены поверхности тел,

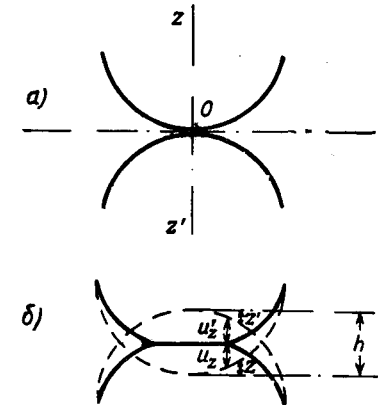


Рис. 1.

<sup>1)</sup> Излагаемая так называемая *контактная задача* теории упругости была впервые решена Г. Герцем.



какими они были бы при отсутствии деформации, а сплошной линией — поверхности сдавленных тел; буквы  $z$  и  $z'$  обозначают длины, определяемые равенствами (9,1) и (9,2). Как непосредственно видно из рисунка, во всех точках области соприкосновения имеет место равенство

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

или

$$(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \quad (9,3)$$

В точках же вне этой области, где обе поверхности не соприкасаются, имеет место неравенство  $z + z' + u_z + u'_z > h$ .

Выберем направления осей  $x, y$  таким образом, чтобы тензор  $\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}$  был приведен к главным осям. Обозначая главные значения этого тензора посредством  $A$  и  $B'$ , перепишем равенство (9,3) в виде

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \quad (9,4)$$

Обозначим посредством  $P_z(x, y)$  давление между обоими сдавленными телами в точках их соприкосновения (вне области соприкосновения, разумеется,  $P_z = 0$ ). При определении зависимости между  $P_z$  и смещениями  $u_z, u'_z$  можно с достаточной точностью рассматривать поверхности тел как плоские и воспользоваться полученными в предыдущем параграфе формулами. Согласно третьей из формул (8,19) (учитывая также (8,14)) смещение  $u_z$  под влиянием нормальных сил  $P_z(x, y)$  определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy', \\ u'_z &= \frac{1-\sigma'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \end{aligned} \quad (9,5)$$

( $\sigma, \sigma'$  и  $E, E'$  — коэффициенты Пуассона и модули растяжения обоих тел); поскольку вне области соприкосновения  $P_z = 0$ , то интегриро-

1) Величины  $A$  и  $B$  связаны с радиусами кривизны  $R_1, R_2$  и  $R'_1, R'_2$  обеих поверхностей следующими соотношениями:

$$2(A+B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2},$$

$$4(A-B)^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right)^2 + 2 \cos 2\varphi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right),$$

где  $\varphi$  есть угол между теми нормальными сечениями поверхностей, в которых радиусы кривизны —  $R_1$  и  $R'_1$ .

Знаки радиусов кривизны предполагаются положительными, если соответствующие центры кривизны расположены внутри соответствующего тела, и отрицательными — в обратном случае.

вание производится здесь только по этой области. Заметим, что из этих формул следует, что отношение  $\frac{u_z}{u'_z}$  постоянно и равно

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1-\sigma^2)E'}{(1-\sigma'^2)E}. \quad (9,6)$$

Соотношения (9,4) и (9,6) вместе непосредственно определяют распределение деформации  $u_z, u'_z$  по области соприкосновения (сами же формулы (9,5) и (9,6) относятся, конечно, и к точкам вне этой области).

Подставляя выражения (9,5) в (9,4), получим:

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right) \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = h - Ax^2 - By^2. \quad (9,7)$$

Это интегральное уравнение определяет распределение давления  $P_z$  по области соприкосновения. Его решение может быть найдено из аналогии со следующими известными из теории потенциала соотношениями. На мысль воспользоваться этой аналогией наводит тот факт, что, во-первых, интеграл, стоящий в левой стороне уравнения (9,7), — типа обычных в теории потенциала интегралов, определяющих потенциал, создаваемый некоторым распределением зарядов, и, во-вторых, что потенциал поля внутри равномерно заряженного эллипсоида есть квадратичная функция координат.

Если по объёму трёхосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

равномерно распределён заряд (с постоянной объёмной плотностью  $\rho$ ), то потенциал поля внутри эллипсоида определяется выражением

$\varphi(x, y, z) =$

$$= \pi \rho abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}}.$$

В предельном случае сильно уплощённого (в направлении оси  $z$ ) эллипсоида, что соответствует  $c \rightarrow 0$ , получим отсюда

$$\varphi(x, y) = \pi \rho abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}$$

(при переходе к пределу  $c \rightarrow 0$  надо, разумеется, положить равной нулю также и координату  $z$  точек внутри эллипсоида). С другой

стороны, потенциал  $\varphi(x, y, z)$  может быть написан в виде интеграла

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{q \, dx' \, dy' \, dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

где интегрирование производится по объёму эллипсоида. Переходя здесь к пределу  $c \rightarrow 0$ , мы должны положить под корнем  $z = z' = 0$ ; производя интегрирование по  $dz'$  в пределах между  $\pm c \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$ , получим:

$$\varphi(x, y) = 2qc \iint \frac{dx' \, dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}},$$

$$(r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}),$$

где интегрирование производится по площади внутри эллипса  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ . Приравнявая оба выражения для  $\varphi(x, y)$ , получим следующее тождество:

$$\iint \frac{dx' \, dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}. \quad (9,8)$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (9,7), мы видим, что в их правых сторонах стоят квадратичные функции от  $x$  и  $y$  одинакового вида, а в левых — интегралы одинакового типа. Поэтому мы можем сразу заключить, что область соприкосновения тел (т. е. область интегрирования в интеграле в (9,7)) ограничена эллипсом вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9,9)$$

и что функция  $P_z(x, y)$  должна быть вида

$$P_z(x, y) = \text{const.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Выбирая  $\text{const}$  так, чтобы интеграл  $\iint P_z \, dx \, dy$  по области соприкосновения был равен заданной полной силе  $F$ , с которой сдавливаются оба тела, получим:

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (9,10)$$

Эта формула определяет закон распределения давления по площади области соприкосновения. Отметим, что давление в центре области в полтора раза превышает среднее давление  $F/\pi ab$ .

Подставив (9,10) в уравнение (9,7) и заменив получающийся в нём интеграл его выражением согласно (9,8), получим:

$$\frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} d\xi = h - Ax^2 - By^2,$$

где

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right).$$

Это равенство должно выполняться тождественно при всех значениях  $x, y$  (внутри эллипса (9,9)); поэтому должны быть попарно равны в отдельности коэффициенты при  $x$  и  $y$  и свободные члены в обеих сторонах. Отсюда находим следующие соотношения:

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (9,11)$$

$$A = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (9,12)$$

$$B = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi) \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}.$$

Уравнения (9,12) определяют полуоси  $a$  и  $b$  области соприкосновения по заданной силе  $F$  ( $A$  и  $B$  — известные для данных тел величины). После этого соотношение (9,11) определит зависимость между силой  $F$  и вызываемым ею сближением тел  $h$ . Интегралы, стоящие в правых сторонах этих уравнений, — эллиптические.

Таким образом, задачу о соприкосновении тел можно считать полностью решённой. Форма поверхности тел (т. е. смещения  $u_x, u_z$ ) вне области соприкосновения определяется теми же формулами (9,5), (9,10), причём значения интегралов можно сразу определить, исходя из аналогии с потенциалом поля заряженного эллипсоида, — на этот раз вне его. Наконец, по формулам предыдущего параграфа можно было бы определить также и распределение деформации по объёму тел (но, конечно, лишь на расстояниях, малых по сравнению с размерами тела).

Применим полученные формулы к соприкосновению двух шаров с радиусами  $R$  и  $R'$ . Здесь  $A=B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ ; из соображений симметрии ясно, что будет и  $a=b$ , т. е. область соприкосновения есть круг. Из (9,12) получим для радиуса  $a$  области соприкосновения значение

$$a = F^{1/3} \left( D \frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/3}. \quad (9,13)$$

$h$  есть в данном случае разность между суммой  $R+R'$  и расстоянием между центрами шаров. Из (9,10) получим следующее соотношение между  $F$  и  $h$ :

$$h = F^{2/3} \left[ D^2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]^{1/3}. \quad (9,14)$$

Отметим, что  $h$  пропорционально степени  $F^{2/3}$  сдвигивающей силы; обратно, сила  $F$  пропорциональна степени  $h^{3/2}$  производимого ею сближения тел. Напишем ещё потенциальную энергию  $U$  соприкасающихся шаров. Замечая, что должно быть  $(-F) = -\frac{\partial U}{\partial h}$ , получим:

$$U = h^{5/2} \frac{2}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}. \quad (9,15)$$

Наконец, укажем, что зависимость вида

$$h = \text{const} \cdot F^{2/3}, \quad F = \text{const} \cdot h^{3/2}$$

имеет место не только для шаров, но и при соприкосновении других конечных тел. В этом легко убедиться из соображений подобия. Если произвести замену  $a^2 \rightarrow \alpha a^2$ ,  $b^2 \rightarrow \alpha b^2$ ,  $F \rightarrow \alpha^{3/2} F$ , где  $\alpha$  — произвольная постоянная, то уравнения (9,12) останутся неизменными. В уравнении же (9,11) правая часть умножится на  $\alpha$ , и для того чтобы оно осталось неизменным, надо заменить  $h$  на  $\alpha h$ . Отсюда и следует, что  $F$  должно быть пропорционально  $h^{3/2}$ .

### Задачи

1. Определить время, в течение которого соприкасаются два сталкивающиеся упругих шара.

Решение. В системе отсчёта, в которой центр инерции обоих шаров покоится, энергия шаров до столкновения равна кинетической энергии относительного движения  $\frac{\mu v^2}{2}$ , где  $v$  — относительная скорость сталкивающихся

шаров, а  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  — их приведённая масса. В течение столкновения полная энергия равна сумме кинетической энергии, которую можно написать в виде  $\frac{\mu \dot{h}^2}{2}$ , и потенциальной энергии (9,15). В силу закона сохранения

энергии имеем:

$$\mu \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + k h^{5/2} = \mu v^2, \quad k = \frac{4}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}.$$

Максимальное сближение шаров  $h_0$  соответствует моменту, когда их относительная скорость  $\dot{h}$  обращается в нуль и равна

$$h_0 = \left( \frac{\mu}{k} \right)^{2/5} v^{4/5}.$$

Время  $\tau$ , в течение которого длится столкновение (т. е.  $h$  меняется от 0 до  $h_0$  и обратно до нуля), равно

$$\tau = 2 \int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{v^2 - \frac{k}{\mu} h^{5/2}}} = 2 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{5/2}}},$$

или

$$\tau = \frac{4 \sqrt{\pi} \Gamma(2/5)}{5 \Gamma(9/10)} \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} = 2,94 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5}.$$

Пользуясь при решении этой задачи полученными в тексте статическими формулами, мы тем самым пренебрегаем упругими колебаниями шара, возникающими при столкновении. Возможность такого пренебрежения требует, чтобы скорость  $v$  была достаточно мала по сравнению со скоростью звука. Фактически, однако, применимость этой теории ограничивается ещё раньше благодаря тому, что возникающие при столкновении деформации переходят за предел упругости вещества.

2. Определить размеры области соприкосновения и распределение давления в ней при сдвигивании двух цилиндров вдоль их образующих.

Решение. Область соприкосновения представляет собой в этом случае узкую полосу вдоль длины цилиндров. Её ширину  $2a$  и распределение давления в ней можно найти из полученных в тексте формул путём предельного перехода  $b/a \rightarrow \infty$ . Распределение давления будет функцией вида

$$P_z(x) = \text{const} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

( $x$  — координата вдоль ширины полосы соприкосновения); нормируя её на отнесённую к единице длины цилиндров сдвигивающую силу  $F$ , получим:

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя это выражение в (9,7) и производя интегрирование с помощью (9,8), имеем:

$$A = \frac{4DF}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi^2)^{3/2} \xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

Один из радиусов кривизны цилиндрической поверхности бесконечен, а другой совпадает с радиусом цилиндра; поэтому в данном случае

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad B = 0.$$

Окончательно находим для искомой ширины полосы соприкосновения:

$$a = \sqrt{\frac{16DF}{3\pi} \frac{RR'}{R+R'}}.$$

### § 10. Упругие свойства кристаллов

Изменение свободной энергии при изотермическом сжатии кристалла является, как и у изотропных тел, квадратичной функцией тензора деформации. В противоположность тому, что имело место для изотропных тел, эта функция содержит теперь не два, а большее число независимых коэффициентов.

Общий вид свободной энергии деформированного кристалла есть

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}, \quad (10,1)$$

где  $\lambda_{iklm}$  есть некоторый тензор 4-го ранга, называемый *тензором модулей упругости*. Поскольку тензор деформации симметричен, то произведение  $u_{ik} u_{lm}$  не меняется при перестановке индексов  $i$  с  $k$ ,  $l$  с  $m$  или пары  $i, k$  с парой  $l, m$ . Очевидно поэтому, что и тензор  $\lambda_{iklm}$  может быть определён так, чтобы он обладал такими же свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \quad (10,2)$$

Путём простого подсчёта можно убедиться в том, что число различных компонент тензора 4-го ранга, обладающего такими свойствами симметрии, равно в общем случае 21.

Соответственно выражению (10,1) для свободной энергии зависимость тензора напряжений от тензора деформации имеет в кристаллах вид (ср. также сноску на стр. 59)

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm} u_{lm}. \quad (10,3)$$

Наличие той или иной симметрии кристалла приводит к появлению зависимостей между различными компонентами тензора  $\lambda_{iklm}$ , так что число его независимых компонент оказывается меньшим, чем 21.

Рассмотрим эти соотношения для всех возможных типов макроскопической симметрии кристаллов, т. е. для всех кристаллических классов, распределив их по соответствующим кристаллическим системам.

1. Триклинная система. Триклинная симметрия (классы  $C_1$  и  $C_i$ ) не накладывает никаких ограничений на компоненты тензора  $\lambda_{iklm}$ , а выбор системы координат с точки зрения симметрии вполне произволен. При этом отличны от нуля и независимы все 21 модуль упругости. Произвольность выбора системы координат позволяет, однако, наложить на компоненты тензора  $\lambda_{iklm}$  дополнительные условия. Поскольку ориентация системы координат относительно тела определяется тремя величинами (углами поворота), то таких условий может быть три; можно, например, три из компонент считать равными нулю. Тогда независимыми величинами, характеризующими упругие свойства кристалла, будут 18 отличных от нуля модулей и 3 угла, определяющих ориентацию осей в кристалле.

2. Моноклинная система. Рассмотрим класс  $C_2$ ; выбираем систему координат с плоскостью  $x, y$ , совпадающей с плоскостью симметрии. При отражении в этой плоскости координаты подвергаются преобразованию:  $x \rightarrow x, y \rightarrow y, z \rightarrow -z$ . Компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Поэтому ясно, что при указанном преобразовании все компоненты  $\lambda_{iklm}$ , среди индексов которых индекс  $z$  содержится нечётное (1 или 3) число раз, переменяют свой знак, а остальные компоненты останутся неизменными. С другой стороны, в силу симметрии кристалла все характеризующие его свойства величины (в том числе и все компоненты  $\lambda_{iklm}$ ) должны остаться неизменными при отражении в плоскости симметрии. Поэтому ясно, что все компоненты с нечётным числом индексов  $z$  должны быть равными нулю. Соответственно этому общее выражение для свободной упругой энергии кристалла моноклинной системы есть

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{yyyy} u_{yy}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + \\ + \lambda_{xxzz} u_{xx} u_{zz} + \lambda_{yyzz} u_{yy} u_{zz} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xxzz} u_{xz}^2 + 2\lambda_{yyzz} u_{yz}^2 + \\ + 2\lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + 2\lambda_{yyyx} u_{yy} u_{yx} + 2\lambda_{xyzz} u_{xy} u_{zz} + 4\lambda_{xzyz} u_{xz} u_{yz}. \quad (10,4)$$

Здесь стоят 13 независимых коэффициентов. Такое же выражение получается для класса  $C_2$ , а также и класса  $C_{2h}$ , содержащего оба элемента симметрии ( $C_2$  и  $\sigma_h$ ) вместе. В изложенных рассуждениях, однако, соображения симметрии фиксируют выбор направления лишь одной из осей координат ( $z$ ), направления же осей  $x, y$  в перпендикулярной плоскости остаются произвольными. Этим произволом можно воспользоваться для того, чтобы надлежащим выбором осей обратить в нуль одну из компонент, скажем  $\lambda_{xzyz}$ . Тогда 13 величинами, характеризующими упругие свойства кристалла, будут 12 отличных от нуля модулей и один угол, определяющий ориентацию осей в плоскости  $x, y$ .

3. Ромбическая система. Во всех классах этой системы ( $C_{2v}$ ,  $D_2$ ,  $D_{2h}$ ) выбор осей координат однозначно диктуется симметрией и для свободной энергии получается выражение одинакового вида. Рассмотрим, например, класс  $D_{2h}$  и выберем плоскости координат в трёх плоскостях симметрии этого класса. Отражения в каждой из этих плоскостей представляют собой преобразования, при которых одна из координат меняет знак, а две другие — не меняются. Очевидно, поэтому, что из всех компонент  $\lambda_{iklm}$  отличными от нуля останутся только те, среди индексов которых каждое из их значений  $x$ ,  $y$  и  $z$  встречается чётное число раз; все остальные компоненты должны были бы менять знак при отражении в какой-нибудь из плоскостей симметрии. Таким образом, общее выражение для свободной энергии имеет в ромбической системе вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{yyyy} u_{yy}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + \lambda_{xxzz} u_{xx} u_{zz} + \lambda_{yyzz} u_{yy} u_{zz} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzzz} u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz} u_{yz}^2. \quad (10,5)$$

Она содержит всего девять модулей упругости.

4. Тетрагональная система. Рассмотрим класс  $C_{4v}$ . Выбираем координаты с осью  $z$  по оси  $C_4$ , а оси  $x$ ,  $y$  — перпендикулярными к двум из вертикальных плоскостей симметрии. Отражения в этих двух плоскостях означают соответственно преобразования  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $z \rightarrow z$  и  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ ; в силу этого исчезают все компоненты  $\lambda_{iklm}$  с нечётным числом одинаковых индексов. Далее, поворот на угол  $\frac{\pi}{4}$  вокруг оси  $C_4$  представляет собой преобразование  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow -x$ ,  $z \rightarrow z$ . Отсюда вытекают соотношения:

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \quad \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz}, \quad \lambda_{xzzz} = \lambda_{yzyz}.$$

Остальные преобразования, входящие в класс  $C_{4v}$ , ничего не добавляют к этим условиям. Таким образом, свободная энергия кристаллов тетрагональной системы имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxzz} (u_{xx} u_{zz} + u_{yy} u_{zz}) + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzzz} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,6)$$

Она содержит шесть модулей упругости.

Такой же результат получится и для других классов тетрагональной системы, в которых естественный выбор осей координат диктуется симметрией ( $D_{2d}$ ,  $D_4$ ,  $D_{4h}$ ). В классах же  $C_4$ ,  $S_4$ ,  $C_{4h}$  однозначен выбор лишь одной оси ( $z$ ) — вдоль оси  $C_4$  или  $S_4$ . При

этом требования симметрии допускают существование (помимо фигурирующих в (10,6)) еще и компонент

$$\lambda_{xxxy} = -\lambda_{yyyx}.$$

Надлежащим выбором направлений осей  $x$ ,  $y$  эти компоненты могут быть обращены в нуль, и тогда  $F$  снова приведётся к тому же виду (10,6).

5. Ромбоэдрическая система. Рассмотрим класс  $C_{3v}$  и выберем систему координат с осью  $z$  вдоль оси 3-го порядка и осью  $y$ , перпендикулярной к одной из вертикальных плоскостей симметрии. Для выяснения ограничений, налагаемых на компоненты тензора  $\lambda_{iklm}$  наличием оси  $C_3$ , удобно произвести формальное преобразование, введя комплексные «координаты»  $\xi$ ,  $\eta$  согласно

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy,$$

координату же  $z$  оставляем без изменений. К этим новым «координатам» преобразуем также и тензор  $\lambda_{iklm}$ ; в его компонентах индексы пробегает теперь значения  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $z$ . Легко видеть, что при повороте на  $120^\circ$  вокруг оси  $C_3$  «координаты» подвергаются преобразованию

$$\xi \rightarrow \xi e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \quad z \rightarrow z.$$

Отличными от нуля могут быть в силу симметрии кристалла только те из компонент  $\lambda_{iklm}$ , которые не меняются при этом преобразовании. Очевидно, что этим свойством обладают те компоненты, среди индексов которых три раза повторяются  $\xi$  или  $\eta$  (обращаем внимание на то, что  $(e^{2\pi i/3})^3 = e^{2\pi i} = 1$ ), или индекс  $\xi$  содержится столько же раз, сколько  $\eta$  (поскольку  $e^{2\pi i/3} e^{-2\pi i/3} = 1$ ); таковыми являются компоненты:

$$\lambda_{zzzz}, \quad \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \quad \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \quad \lambda_{\xi\eta z z}, \quad \lambda_{\xi\xi\eta z}, \quad \lambda_{\xi\xi\xi z}, \quad \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Далее, отражение в плоскости симметрии, перпендикулярной к оси  $y$ , есть преобразование  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ , или для величин  $\xi$ ,  $\eta$ :  $\xi \rightarrow \eta$ ,  $\eta \rightarrow \xi$ . Поскольку при этом преобразовании  $\lambda_{\xi\xi\xi z}$  переходит в  $\lambda_{\eta\eta\eta z}$ , то эти две компоненты должны быть равны друг другу. Таким образом, кристаллы ромбоэдрической системы обладают всего шестью модулями упругости. Для того чтобы написать выражение для свободной энергии, надо составить сумму  $\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}$ ,

в которой индексы пробегает значения  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $z$ ; поскольку нам надо выразить  $F$  через компоненты тензора деформации в координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то мы должны выразить через них компоненты в «координатах»  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $z$ . Это легко сделать, воспользовавшись тем, что компоненты тензора  $u_{ik}$  преобразуются как произведения соответствующих двух координат. Так, например, из

$$\xi\bar{\xi} = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

следует, что

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}.$$

В результате находим для  $F$  следующее выражение:

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta} (u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta} [(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta z z} (u_{xx} + u_{yy}) u_{zz} + 4\lambda_{\xi z \eta z} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + \\ + 4\lambda_{\xi\xi\xi z} [(u_{xx} - u_{yy}) u_{xz} - 2u_{xy} u_{yz}]. \quad (10,7)$$

Она содержит 6 независимых коэффициентов. Такой же результат получится для классов  $D_3$  и  $D_{3d}$ . В классах же  $C_3$  и  $S_6$ , в которых выбор осей  $x, y$  остается произвольным, требования симметрии допускают также и отличную от нуля разность

$$\lambda_{\xi\xi\xi z} - \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Она, однако, может быть обращена в нуль надлежащим выбором осей  $x, y$ .

6. Гексагональная система. Рассмотрим класс  $C_6$  и выберем систему координат с осью  $z$  по оси 6-го порядка. Введём опять «координаты»  $\xi = x + iy, \eta = x - iy$ . При повороте на угол  $\frac{2\pi}{6}$  вокруг оси  $z$  «координаты»  $\xi, \eta$  подвергаются преобразованию

$$\xi \rightarrow \xi e^{\frac{2\pi i}{6}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{6}}.$$

Отсюда видно, что отличны от нуля только те компоненты  $\lambda_{iklm}$ , среди индексов которых индексы  $\xi$  и  $\eta$  встречаются одинаковое число раз. Таковыми являются:

$$\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \lambda_{\xi\eta z z}, \lambda_{\xi z \eta z}.$$

Другие возможные элементы симметрии гексагональной системы ничего не добавляют к этим ограничениям. Таким образом, имеется всего пять модулей упругости. Свободная энергия имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta} (u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta} [(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta z z} u_{zz} (u_{xx} + u_{yy}) + 4\lambda_{\xi z \eta z} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,8)$$

Следует отметить, что деформация в плоскости  $x, y$  (деформация с отличными от нуля  $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ ) определяется всего двумя упругими модулями, как и для изотропного тела; другими словами, в плоскости, перпендикулярной к гексагональной оси, упругие свойства гексагонального кристалла изотропны.

По этой причине выбор направлений осей в этой плоскости вообще несуществен и никак не отражается на виде  $F$ . Выражение (10,8) относится поэтому ко всем классам гексагональной системы.

7. Кубическая система. Направим оси  $x, y, z$  по трём осям 4-го порядка кубической системы. Уже наличие тетрагональной симметрии (с осью 4-го порядка вдоль оси  $z$ ) ограничивало число различных компонент тензора  $\lambda_{iklm}$  следующими шестью:

$$\lambda_{xxxx}, \lambda_{zzzz}, \lambda_{xxzz}, \lambda_{xxyy}, \lambda_{xyxy}, \lambda_{xzzz}.$$

Повороты на  $90^\circ$  вокруг осей  $x$  и  $y$  дают соответственно преобразования  $x \rightarrow x, y \rightarrow -z, z \rightarrow y$  и  $x \rightarrow z, y \rightarrow y, z \rightarrow -x$ . В силу них из написанных шести компонент делаются равными первая со второй, третья с четвёртой и пятая с шестой. Таким образом, остаётся всего три различных модуля упругости. Свободная энергия кристаллов кубической системы имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy} (u_{xx} u_{yy} + u_{xx} u_{zz} + u_{yy} u_{zz}) + \\ + 2\lambda_{xyxy} (u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,9)$$

Выпишем ещё раз число независимых параметров (модулей упругости или углов, определяющих ориентацию осей в кристалле) для классов различных систем:

триклинная . . . . .	21
моноклинная . . . . .	13
ромбическая . . . . .	9
тетрагональная ( $C_4, S_4, C_{4h}$ ) . . . . .	7
тетрагональная ( $C_{3v}, D_{2d}, D_4, D_{4h}$ ) . . . . .	6
ромбоэдрическая ( $C_3, S_6$ ) . . . . .	7
ромбоэдрическая ( $C_{3v}, D_3, D_{3d}$ ) . . . . .	6
гексагональная . . . . .	5
кубическая . . . . .	3

Минимальное же число отличных от нуля модулей, которого можно добиться надлежащим выбором осей координат, одинаково для всех классов в каждой системе:

триклинная . . . . .	18
моноклинная . . . . .	12
ромбическая . . . . .	9
тетрагональная . . . . .	6
ромбоэдрическая . . . . .	6
гексагональная . . . . .	5
кубическая . . . . .	3

Всё сказанное относится, разумеется, к монокристаллам. Поликристаллические же тела с достаточно малыми размерами входящих в их состав кристаллитов можно рассматривать как изотропные тела (поскольку мы интересуемся деформациями в участках, больших по сравнению с размерами кристаллитов). Как и всякое изотропное

тело, поликристалл характеризуется всего двумя модулями упругости. Можно было бы на первый взгляд подумать, что эти модули можно получить из модулей упругости отдельных кристаллитов посредством простого усреднения. В действительности, однако, это не так. Если рассматривать деформацию поликристалла как результат деформации входящих в него кристаллитов, то следовало бы принципиально решить уравнения равновесия для всех этих кристаллитов с учётом соответствующих граничных условий на поверхностях их раздела. Отсюда видно, что связь между упругими свойствами кристалла, рассматриваемого в целом, и свойствами составляющих его кристаллитов зависит от конкретной формы кристаллитов и от корреляции между их взаимными ориентациями. Поэтому не существует общей зависимости между модулями упругости поликристаллов и монокристалла (того же вещества).

Вычисление модулей изотропного поликристалла по монокристаллическим модулям может быть произведено со значительной точностью лишь в случае слабой анизотропии упругих свойств монокристалла<sup>1)</sup>. В первом приближении модули упругости поликристалла можно положить равными просто «изотропной части» упругих модулей монокристалла. Тогда в следующем приближении появляются члены, квадратичные по малой «анизотропной части» этих модулей. Оказывается, что эти поправочные члены не зависят от формы кристаллитов и от корреляции их ориентаций и могут быть вычислены в общем виде<sup>2)</sup>.

Наконец, остановимся на тепловом расширении кристаллов. В изотропных телах тепловое расширение происходит одинаково по всем направлениям, так что тензор деформации при свободном тепловом расширении имеет вид (см. § 6)

$$u_{ik} = \frac{1}{3} \alpha (T - T_0) \delta_{ik},$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения. В кристаллах же надо писать

$$u_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{3} (T - T_0), \quad (10,10)$$

где  $\alpha_{ik}$  — некоторый тензор второго ранга, симметричный по индексам  $i, k$ . Выясним число различных независимых компонент этого тензора в кристаллах разных систем. Для этого проще всего воспользоваться известным из тензорной алгебры обстоятельством, что всякому симметричному тензору второго ранга можно привести в соответствие некоторый, как говорят, тензорный эллипсоид<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Так, у «слабо анизотропного» кубического кристалла должна быть малой разность  $\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy} - 2\lambda_{xyxy}$ .

<sup>2)</sup> См. И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенвейг, ЖЭТФ 16, 967 (1946).

<sup>3)</sup> Тензорный эллипсоид определяется уравнением  $\alpha_{ik} x_i x_k = 1$ .

Из соображений симметрии непосредственно очевидно, что при триклинной, моноклинной и ромбической симметриях эллипсоид является, вообще говоря, трёхосным (т. е. длины всех его осей различны). При тетрагональной же, ромбоэдрической и гексагональной симметриях эллипсоид должен являться эллипсоидом вращения (с осью соответственно вдоль осей симметрии  $C_4$ ,  $C_3$  или  $C_6$ ). Наконец, кубическая симметрия приводит к вырождению эллипсоида в шар. Но трёхосный эллипсоид определяется тремя независимыми величинами (длинами осей), эллипсоид вращения — двумя, а шар — всего одной (радиусом). Таким образом, число независимых компонент тензора  $\alpha_{ik}$  в кристаллах различных систем есть:

триклинная, моноклинная, ромбическая	3
тетрагональная, ромбоэдрическая, гексагональная	2
кубическая	1

Кристаллы первых трёх систем называются двухосными, а вторых трёх — одноосными. Обратим внимание на то, что тепловое расширение кристаллов кубической системы определяется всего одной величиной, т. е. что они ведут себя в отношении своего теплового расширения как изотропные тела.

### Задача

Определить зависимость модуля растяжения кубического кристалла от направления.

Решение. Выбираем оси координат по трём осям четвёртого порядка кубического кристалла. Пусть ось вырезанного из кристалла стержня имеет направление единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  в растянутом стержне должен удовлетворять условиям: при умножении на  $n_i$  должна получаться направленная по  $\mathbf{n}$  сила растяжения (условие на основаниях стержня), а при умножении на вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{n}$ , он должен обращаться в нуль (условие на боковой поверхности стержня). Такой тензор должен иметь вид  $\sigma_{ik} = p n_i n_k$ , где  $p$  — действующая на единицу поверхности основной стержня растягивающая сила. Вычисляя компоненты  $\sigma_{ik}$  с помощью выражения (10,9) для свободной энергии<sup>1)</sup> и сравнивая их с выражениями  $\sigma_{ik} = p n_i n_k$ , получим для компонент тензора деформации

$$u_{xx} = p \frac{(c_1 + 2c_2) n_x^2 - c_2}{(c_1 - c_2)(c_1 + 2c_2)}, \quad u_{xy} = p \frac{n_x n_y}{2c_3}$$

<sup>1)</sup> При вычислении  $\sigma_{ik}$  надо иметь в виду следующее обстоятельство. Если производить вычисление не непосредственно по формулам  $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}$ , а дифференцированием конкретного выражения для свободной энергии по компонентам тензора  $u_{ik}$ , то производные по  $u_{ik}$  с  $i \neq k$  дают удвоенные значения соответствующих компонент  $\sigma_{ik}$ . Это связано с тем, что выражения  $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$  имеют по существу смысл лишь как выражающие тот факт, что  $dF = \sigma_{ik} du_{ik}$ ; но в сумму  $\sigma_{ik} du_{ik}$  члены с дифференциалами  $du_{ik}$  каждой из компонент с  $i \neq k$  симметричного тензора  $u_{ik}$  входят дважды.

и аналогично для остальных компонент  $u_{ik}$ ; здесь введены обозначения  $\lambda_{xxxx} = c_1$ ,  $\lambda_{xxyy} = c_2$ ,  $\lambda_{xyxy} = c_3$ .

Относительное продольное удлинение стержня есть  $u = \frac{dl' - dl}{dl}$ , где  $dl'$  определяется формулой (1,2) и  $\frac{dx_i}{dl} = n_i$ . Это даёт для малых деформаций  $u = u_{ik} n_i n_k$ . Модуль Юнга определяется как коэффициент пропорциональности в  $p = Eu$  и равен

$$\frac{1}{E} = \frac{c_1 + c_2}{(c_1 + 2c_2)(c_1 - c_2)} + \left( \frac{1}{c_3} - \frac{2}{c_1 - c_2} \right) (n_x^2 n_y^2 + n_x^2 n_z^2 + n_y^2 n_z^2).$$

$E$  имеет экстремальные значения в направлениях рёбер (осей координат) и в направлениях пространственных диагоналей куба.

## ГЛАВА II

### РАВНОВЕСИЕ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК

#### § 11. Энергия изогнутой пластинки

В этой главе мы будем заниматься изучением некоторых частных случаев равновесия деформируемых тел и начнём с рассмотрения деформаций тонких пластинок. Когда мы говорим, что пластинка является тонкой, то подразумевается, что ее толщина мала по сравнению с размерами в двух других направлениях. Самые деформации по-прежнему считаются малыми. В данном случае критерием малости деформации является малость смещений точек пластинки по сравнению с её толщиной.

При применении к тонким пластинкам общие уравнения равновесия значительно упрощаются. Удобнее, однако, выводить эти упрощённые уравнения не непосредственно из общих, а вычислив заново свободную энергию изогнутой пластинки и затем проварьировав эту энергию.

При сгибании пластинки в некоторых местах внутри неё возникают растяжения, а в других — сжатия. Именно, на выпуклой стороне пластинки, очевидно, происходит растяжение; по мере углубления в толщу пластинки это растяжение постепенно уменьшается, достигая в конце концов нуля, вслед за чем в дальнейших слоях начинается постепенно увеличивающееся сжатие. Таким образом, внутри пластинки имеется *нейтральная поверхность*, на которой растяжение вообще отсутствует, а по двум сторонам её деформация имеет противоположный знак. Очевидно, что эта поверхность расположена по середине толщины пластинки.

Выберем систему координат с началом в какой-нибудь точке нейтральной поверхности и осью  $z$ , направленной по нормали к ней. Плоскость  $x, y$  совпадает с плоскостью недеформированной пластинки. Обозначим вертикальное смещение точек нейтральной поверхности, т. е. их  $z$ -координату, посредством  $\xi$  (рис. 2). Что касается компонент смещений этих точек в плоскости  $x, y$ , то они являются, очевидно, величинами второго порядка малости по сравнению с  $\xi$  и потому могут быть положены равными нулю. Таким

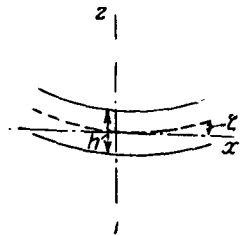


образом, вектор смещения точек нейтральной поверхности есть

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \zeta(x, y). \quad (11,1)$$

Для дальнейших вычислений необходимо сделать следующее замечание относительно напряжений, действующих в деформированной пластинке. Поскольку пластинка тонкая, то, для того чтобы изогнуть её, требуется приложить к её поверхности сравнительно небольшие силы. Эти силы во всяком случае будут значительно меньше, чем те внутренние напряжения, которые возникают внутри деформированной пластинки благодаря имеющим в ней место растяжениям и сжатиям. Поэтому в граничных условиях (2,8) можно пренебречь силами  $P_i$  так что остаётся  $\sigma_{ik}n_k = 0$ . Поскольку пластинка слабо изогнута, то можно считать, что вектор нормали  $\mathbf{n}$  направлен по оси  $z$ .

Рис. 2.



Таким образом, на обеих поверхностях пластинки должно быть,

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Но поскольку толщина пластинки мала, то из равенства этих величин нулю на двух сторонах пластинки следует, что они малы и внутри неё. Таким образом, мы приходим к выводу, что во всей пластинке компоненты  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$  малы по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. На этом основании мы можем положить их равными нулю и определить компоненты тензора деформации из этого условия.

Согласно общим формулам (5,13) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zx}, & \sigma_{zy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zy}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})]. \end{aligned} \quad (11,2)$$

Приравнявая эти выражения нулю, находим:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}).$$

В первые два уравнения можно для  $u_z$  с достаточной точностью подставить  $\zeta(x, y)$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

откуда

$$u_x = -z \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (11,3)$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю так, чтобы при  $z=0$  имело место  $u_x = u_y = 0$ . Зная  $u_x$  и  $u_y$ , мы можем определить все компоненты тензора деформации:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, & u_{yy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, & u_{xy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \\ u_{xz} &= u_{yz} = 0, & u_{zz} &= z \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (11,4)$$

Теперь уже можно вычислить, воспользовавшись общей формулой (5,10), свободную энергию  $F$  единицы объёма пластинки. Простое вычисление приводит к выражению

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{1}{2(1-\sigma)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\}. \quad (11,5)$$

Полная свободная энергия пластинки получится отсюда интегрированием по всему её объёму. Интегрирование по  $z$  производится в пределах от  $-h/2$  до  $+h/2$ , где  $h$  — толщина пластинки, а по  $x, y$  — по всей поверхности пластинки. В результате находим полную свободную энергию  $F_{пл} = \int F dV$  деформированной пластинки в виде

$$\begin{aligned} F_{пл} &= \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\sigma) \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (11,6) \end{aligned}$$

(для элемента поверхности можно ввиду малости деформации писать с достаточной точностью просто  $dx dy$ ).

После того как получено выражение для свободной энергии, можно рассматривать пластинку как не обладающую толщиной, т. е. как геометрическую поверхность, поскольку нас интересует только форма, принимаемая ею под влиянием приложенных сил, а не распределение деформаций внутри самой пластинки. Величина  $\zeta$  является тогда смещением точек пластинки, рассматриваемой как поверхность, при её изгибании.

## § 12. Уравнение равновесия пластинки

Уравнение равновесия пластинки мы выведем из условия минимума её свободной энергии. Для этого надо вычислить вариацию выражения (11,6).

Разобьём стоящий в (11,6) интеграл на сумму двух интегралов и будем варьировать каждый из них в отдельности. Первый интеграл можно написать в виде

$$\int (\Delta \zeta)^2 df,$$

где  $df = dx dy$  — элемент поверхности, а  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  обозначает здесь (и везде в §§ 12—14) двухмерный оператор Лапласа. Варьируя этот интеграл, имеем:

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 df &= \int \Delta \zeta \Delta \delta \zeta df = \int \Delta \zeta \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta \zeta df = \\ &= \int \operatorname{div} (\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) df - \int \nabla \delta \zeta \nabla \Delta \zeta df. \end{aligned}$$

Все векторные операции производятся здесь, конечно, в двухмерной системе координат  $x, y$ . Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по замкнутому контуру, охватывающему пластинку<sup>1)</sup>:

$$\int \operatorname{div} (\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) df = \oint \Delta \zeta (\mathbf{n} \operatorname{grad} \delta \zeta) dl = \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl,$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  означает дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру.

Во втором интеграле применяем такое же преобразование и получаем:

$$\begin{aligned} \int \nabla \delta \zeta \nabla \Delta \zeta df &= \int \nabla (\delta \zeta \nabla \Delta \zeta) df - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df = \\ &= \oint \delta \zeta (\mathbf{n} \nabla) \Delta \zeta dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df = \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df. \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты, получаем:

$$\delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 df = \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df - \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} dl + \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl. \quad (12,1)$$

Преобразование вариации второго интеграла в (11,6) несколько более длинно. Это преобразование удобнее производить не в векторном виде, а в компонентах. Имеем:

$$\delta \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df = \int \left\{ 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df.$$

<sup>1)</sup> Формула преобразования двухмерных интегралов в точности аналогична трёхмерной формуле. Роль элемента объёма  $dV$  играет теперь элемент поверхности  $df$  (рассматриваемый как скаляр), а вместо элемента поверхности  $df$  стоит элемент длины контура  $dl$ , умноженный на вектор  $\mathbf{n}$  внешней нормали к контуру. Преобразование интеграла по  $df$  в интеграл по  $dl$  осуществляется заменой оператора  $df \frac{\partial}{\partial x_i}$  на величину  $n_i dl$ . Так, если  $\Phi$  есть некоторый скаляр, то

$$\int \nabla \Phi df = \oint \Phi \mathbf{n} dl.$$

Подинтегральное выражение здесь можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right),$$

т. е. как двухмерную дивергенцию некоторого вектора. Поэтому можно переписать вариацию в виде интеграла по контуру:

$$\begin{aligned} \delta \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df &= \oint dl \sin \theta \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} + \\ &+ \oint dl \cos \theta \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}, \quad (12,2) \end{aligned}$$

где  $\theta$  — угол между осью  $x$  и нормалью  $\mathbf{n}$  к контуру (рис. 3).

Производные от  $\delta \zeta$  по  $x$  и  $y$  выразим через производные по направлению нормали  $\mathbf{n}$  к контуру и по направлению касательной  $\mathbf{l}$  к нему согласно формулам:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial l},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial l}.$$

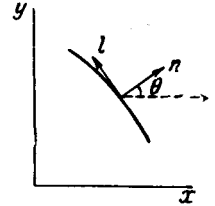


Рис. 3.

Тогда интегралы в формуле (12,2) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta \int \left\{ \dots \right\} df &= \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} + \\ &+ \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Второй интеграл можно вычислить, взяв его по частям. Поскольку он берётся по замкнутому контуру, то пределы интегрирования сливаются в одну точку, и потому мы получаем просто:

$$- \oint dl \delta \zeta \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Сводя все полученные выражения вместе и написав перед ними коэффициенты согласно формуле (11,6), получаем окончательно следующее выражение для вариации свободной энергии:

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{пл}} &= \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left\{ \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta df - \oint \delta \zeta dl \left[ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + \right. \right. \\ &+ (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left( \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) \left. \right] + \\ &+ \oint \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl \left[ \Delta \zeta + (1-\sigma) \left( 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right] \left. \right\}. \quad (12,3) \end{aligned}$$

Для того чтобы получить отсюда уравнение равновесия пластинки, надо приравнять нулю сумму вариации  $\delta F$  и вариации  $\delta U$  потенциальной энергии пластинки, связанной с наличием действующих на неё внешних сил. Эта последняя вариация равна взятой с обратным знаком работе внешних сил при смещении пластинки. Пусть  $P$  есть действующая на пластинку внешняя сила, отнесённая к единице площади её поверхности<sup>1)</sup> и направленная по нормали к ней. Тогда работа, произведённая силами при смещении точек пластинки на  $\delta \zeta$ , равна

$$\int P \delta \zeta df.$$

Таким образом, имеем в качестве условия минимальности полной свободной энергии пластинки уравнение

$$\delta F_{\text{пл}} - \int P \delta \zeta df = 0. \quad (12,4)$$

В левой части этого равенства стоят как интегралы по поверхности, так и интегралы по контуру. Поверхностный интеграл есть

$$\int \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P \right\} \delta \zeta df.$$

Вариация  $\delta \zeta$  в этом интеграле произвольна. Поэтому он равен нулю, если коэффициент при  $\delta \zeta$  исчезает, т. е.

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P = 0. \quad (12,5)$$

Это — уравнение равновесия пластинки, изгибаемой действующими на неё внешними силами<sup>2)</sup>.

Граничные условия для этого уравнения получаются из равенства нулю контурных интегралов в (12,3). При этом следует рассмотреть несколько различных частных случаев. Предположим, что часть края пластинки свободна, т. е. на неё не действуют никакие внешние силы. Тогда вариации  $\delta \zeta$  и  $\delta \frac{\partial \zeta}{\partial n}$  на ней произвольны и должны быть равными нулю коэффициенты при этих вариациях в интегралах по контуру.

<sup>1)</sup> Сила  $P$  может являться здесь результатом действия объёмных сил (например, силы тяжести) и равна тогда интегралу от последней по толщине пластинки.

<sup>2)</sup> Коэффициент

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

в этом уравнении называют жёсткостью пластинки при изгибе или цилиндрической жёсткостью.

Это приводит к уравнениям:

$$-\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} = 0, \quad (12,6)$$

$$\Delta \zeta + (1-\sigma) \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} = 0. \quad (12,7)$$

Они должны выполняться на всей свободной границе пластинки.

Краевые условия (12,6) — (12,7) весьма сложны. Значительно более просты случаи, когда края пластинки заделаны или опёрты.

Если края пластинки заделаны (рис. 4, а), то они не могут испытывать никакого вертикального смещения и, сверх того, не может измениться также и направление этих краёв. Угол, на который поворачивается данный участок края пластинки относительно своего первоначального положения, равен (при малых смещениях  $\zeta$ ) производной  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ . Таким образом, на заделанных краях пластинки вариации  $\delta \zeta$  и  $\delta \frac{\partial \zeta}{\partial n}$  равны нулю, так что контурные интегралы в (12,3) исчезают тождественно. Граничные условия имеют в этом случае простой вид:

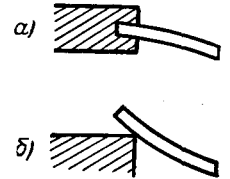


Рис. 4.

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (12,8)$$

Первое выражает собой тот факт, что края пластинки вообще не испытывают вертикального смещения при деформации, а второе — что направление края остаётся горизонтальным.

Легко определить силы реакции, действующие на пластинку со стороны опоры в точках закрепления. Эти силы равны и противоположны силам, действующим на опору со стороны пластинки. Как известно из механики, сила, действующая в некотором направлении, равна производной от энергии по координатам, взятой по этому направлению. В частности, сила, с которой пластинка действует на опору, определяется производной от энергии по смещению  $\zeta$  края пластинки, взятой с обратным знаком, а обратная сила реакции — той же производной с положительным знаком. Но эта производная есть не что иное, как коэффициент при  $\delta \zeta$  во втором интеграле в (12,3). Таким образом, сила реакции, отнесённая к единице длины контура, равна выражению, стоящему в левой части уравнения (12,6) (конечно, не равному теперь нулю), умноженному на  $\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ . Аналогично, момент сил реакции определяется выражением, стоящим в левой части уравнения (12,7), умноженным

на тот же множитель. Это следует непосредственно из известного из механики обстоятельства, что момент силы равен производной от энергии по углу поворота тела. Угол же поворота края пластинки равен производной  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ , так что соответствующий момент сил определяется коэффициентом при  $\delta \frac{\partial \zeta}{\partial n}$  в третьем интеграле в (12,3). При этом оба эти выражения (для силы и момента) ввиду условий (12,8) сильно упрощаются. Именно, поскольку  $\zeta$  и  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$  равны нулю вдоль всего контура края пластинки, то обращаются тождественно в нуль также и их производные всех порядков по направлению касательной  $\mathbf{l}$ . Учитывая это обстоятельство и переходя в (12,6) и (12,7) от производных по  $x$  и  $y$  к производным в направлениях  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$ , получим следующие простые выражения для силы  $F$  и момента  $M$  реакции опоры:

$$F = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \frac{d\theta}{dl} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} \right], \quad (12,9)$$

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2}. \quad (12,10)$$

Другим важным случаем является так называемая опёртая пластинка (рис. 4, б), у которой края только опираются на неподвижную опору, но не закреплены в ней. В таком случае на контуре пластинки (т. е. на линии, по которой пластинка опирается на опору) вертикальное смещение по-прежнему отсутствует, но направление отнюдь не остаётся неизменным. Соответственно этому в (12,3) в интеграле по контуру

$$\delta \zeta = 0,$$

но

$$\frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \neq 0.$$

Поэтому из двух условий (12,6), (12,7) остаётся только второе. Выражение же, стоящее в левой части (12,6), определяет, как и в предыдущем случае, силу реакции, действующую в точках опоры пластинки (момент же этих сил равен теперь в равновесии нулю). Граничное условие (12,7) упрощается, если перейти к производным по направлениям  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$ , причём учесть, что в силу равенства  $\zeta = 0$  на всём контуре обращаются в нуль также и производные  $\frac{\partial \zeta}{\partial l}$  и  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial l^2}$ .

В результате получим граничные условия в виде

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \frac{d\theta}{dl} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (12,11)$$

### Задачи

1. Определить деформацию круглой пластинки (радиуса  $R$ ) с заделанными краями, расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Выбираем полярные координаты с началом в центре пластинки. Сила, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна  $P = \rho hg$ . Уравнение (12,5) приобретает вид

$$\Delta^2 \zeta = 64\beta, \quad \beta = \frac{3\rho g(1-\sigma^2)}{16h^2 E}$$

(положительные  $\zeta$  соответствуют смещению по направлению действия силы тяжести). Поскольку  $\zeta$  есть функция только от  $r$ , то для  $\Delta$  в полярных координатах надо писать  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$ . Общий интеграл этого уравнения есть

$$\zeta = \beta r^4 + ar^2 + b + cr^2 \ln \frac{r}{R} + d \ln \frac{r}{R}.$$

В данном случае надо положить  $d=0$ , так как  $\ln \frac{r}{R}$  обращается при  $r=0$  в бесконечность, а также  $c=0$ , так как этот член приводит к особой точке у  $\Delta \zeta$  при  $r=0$  (это соответствовало бы силе, приложенной к центру пластинки, — см. задачу 3). Постоянные  $a$  и  $b$  определяются из граничных условий  $\zeta = 0$ ,  $\frac{d\zeta}{dr} = 0$  при  $r=R$ . В результате находим:

$$\zeta = \beta (R^2 - r^2)^2.$$

2. То же для пластинки с опёртыми краями.

Решение. Граничные условия (12,11) в случае круглой пластинки приобретают вид

$$\zeta = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

Решение аналогично решению задачи 1 и приводит к результату

$$\zeta = \beta (R^2 - r^2) \left( \frac{5+\sigma}{1+\sigma} R^2 - r^2 \right).$$

3. Определить деформацию круглой пластинки с заделанными краями, к центру которой приложена сила  $f$ .

Решение. Везде, кроме начала координат, имеет место уравнение

$$\Delta^2 \zeta = 0.$$

Интегрируя, находим:

$$\zeta = ar^2 + b + cr^2 \ln \frac{r}{R}$$

(член с  $\ln r$  опять опускаем). Полная сила, действующая на пластинку, равна силе  $f$ , приложенной к её центру; поэтому интеграл от  $\Delta^2 \zeta$  по поверхности пластинки должен быть равен

$$2\pi \int_0^R r \Delta^2 \zeta dr = \frac{12(1-\sigma^2)}{h^3 E} f.$$

Отсюда получается

$$c = \frac{3(1-\sigma^2)f}{2\pi h^3 E}.$$

Постоянные  $a$  и  $b$  определяются из граничных условий. В результате получаем:

$$\zeta = \frac{3f(1-\sigma^2)}{2h^3\pi E} \left[ \frac{1}{2}(R^2-r^2) - r^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

4. То же для пластинки с опёртыми краями.  
Решение.

$$\zeta = \frac{3f(1-\sigma^2)}{4h^3\pi E} \left[ \frac{3+\sigma}{1+\sigma}(R^2-r^2) - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

5. Определить деформацию круглой пластинки, подвешенной в своём центре и находящейся в поле тяжести.

Решение. Уравнение для  $\zeta$  и его общее решение—такие же, как в задаче 1. Поскольку в центре смещение  $\zeta=0$ , то  $c=0$ . Постоянные  $a$ ,  $b$  определяются из граничных условий (12,6) и (12,7), имеющих при круговой симметрии вид

$$\frac{d\Delta\zeta}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \right) = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

В результате находим:

$$\zeta = \beta r^2 \left[ r^2 + 8R^2 \ln \frac{R}{r} + 2R^2 \frac{3+\sigma}{1+\sigma} \right].$$

6. От тела отрывается тонкий слой (толщиной  $h$ ) приложенными к нему внешними силами, действующими против сил поверхностного натяжения на поверхности отрыва. При заданных внешних силах устанавливается равновесие с определённой величиной поверхности отрыва и формой отрываемой пластинки (рис. 5). Вывести формулу, связывающую величину поверхностного натяжения с формой отрываемой пластинки<sup>1)</sup>.

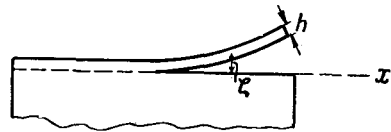


Рис. 5.

Решение. Отрываемый слой рассматриваем как пластинку, один из краёв которой (линия отрыва) заделан. Изгибающий момент, действующий у этого края, определяется формулой (12,10); работа, производимая этим моментом при удлинении области отрыва на  $\delta x$ , равна

$$M \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} = M \delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(работа же изгибающей силы  $F$  является малой величиной второго порядка). Условие равновесия заключается в равенстве этой работы изменению поверхностной энергии, т. е.  $2\alpha \delta x$ , где  $\alpha$ —коэффициент поверхностного натяжения, а множитель 2 учитывает возникновение двух свободных поверхностей при разрыве. Таким образом, получим:

$$\alpha = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2.$$

<sup>1)</sup> Эта задача была рассмотрена И. В. Обреимовым (1930 г.) в связи с разработанным им методом измерения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей; произведённые им этим методом измерения были первыми непосредственными измерениями поверхностного натяжения твёрдых тел.

### § 13. Продольные деформации пластинок

Особым видом деформаций тонких пластинок являются продольные деформации, происходящие в самой плоскости пластинки и не сопровождающиеся её изгибом. Выведем уравнения равновесия, описывающие такие деформации.

Если пластинка достаточно тонка, то деформацию можно считать однородной по её толщине. Тензор деформации является при этом функцией только от  $x$  и  $y$  (плоскость  $x$ ,  $y$  выбрана в плоскости пластинки) и не зависит от  $z$ . Продольные деформации пластинки вызываются обычно либо силами, приложенными к её краям, либо действующими в плоскости пластинки объёмными силами. Граничные условия на обеих поверхностях пластинки гласят при этом:  $\sigma_{ik}n_k=0$ , или, поскольку вектор нормали направлен по оси  $z$ :  $\sigma_{iz}=0$ , т. е.

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Следует, однако, заметить, что в излагаемой ниже приближённой теории эти условия остаются в силе и в том случае, когда растягивающие внешние силы приложены непосредственно к поверхностям пластинки, так как эти силы всё равно будут малыми по сравнению с возникающими в пластинке продольными внутренними напряжениями ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ). Будучи равными нулю на границах, величины  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$  будут малыми и на всём протяжении малой толщины пластинки, в силу чего мы можем приближённо считать их равными нулю во всём объёме пластинки.

Приравнявая нулю выражения (11,2), получим следующие соотношения:

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}), \quad u_{xz} = u_{yz} = 0. \quad (13,1)$$

Подставив их в общие формулы (5,13), получаем отличные от нуля компоненты тензора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{xx} + \sigma u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{yy} + \sigma u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}. \end{aligned} \quad (13,2)$$

Следует обратить внимание на то, что путём формальной замены

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\sigma^2}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (13,3)$$

эти выражения переходят в формулы, определяющие связь между напряжениями  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  и деформациями  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $u_{zz}$  при плоской деформации (формулы (5,13) с  $u_{zz}=0$ ).

После того как мы таким образом исключили вовсе смещение  $u_z$ , мы можем рассматривать пластинку просто как некоторую двухмерную среду («упругая плоскость»), не обладающую толщиной, и говорить о векторе деформации  $\mathbf{u}$  как о двухмерном векторе с двумя компонентами  $u_x$  и  $u_y$ . Если  $P_x, P_y$  — компоненты внешней объёмной силы, отнесённой к единице площади пластинки, то общие уравнения равновесия гласят:

$$h \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + P_x = 0, \quad h \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + P_y = 0.$$

Подставляя сюда выражения (13,2), получаем уравнения равновесия в виде

$$Eh \left[ \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right] + P_x = 0, \quad (13,4)$$

$$Eh \left[ \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right] + P_y = 0.$$

Эти уравнения могут быть написаны в двухмерном векторном виде

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{rot rot } \mathbf{u} = -\mathbf{P} \frac{1-\sigma^2}{Eh}, \quad (13,5)$$

где все векторные операции понимаются как двухмерные.

В частности, в отсутствие объёмных сил уравнение равновесия гласит:

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (13,6)$$

Оно отличается лишь значением коэффициента (в соответствии с (13,3)) от уравнения равновесия для плоской деформации неограниченного вдоль оси  $z$  тела (§ 7)<sup>1</sup>. Так же как и для плоской деформации, можно ввести здесь «функцию напряжения», определённую соотношениями

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (13,7)$$

автоматически удовлетворяющими уравнениям равновесия, написанным в виде

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

<sup>1</sup> Однородную вдоль оси  $z$  деформацию, при которой во всём теле  $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$ , иногда называют *плоским напряжённым состоянием* в отличие от плоской деформации, при которой во всём теле  $u_{zx} = u_{zy} = u_{zz} = 0$ .

Функция напряжений по-прежнему удовлетворяет бигармоническому уравнению, так как для  $\Delta \chi$  имеем соотношение

$$\Delta \chi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}) = \frac{E}{1-\sigma} \text{div } \mathbf{u},$$

отличающееся лишь множителем от того, что мы имели для плоской деформации.

Отметим здесь следующее обстоятельство: распределение напряжений в пластинке, деформируемой приложенными к её краям заданными силами, не зависит от упругих постоянных вещества пластинки. Действительно, эти постоянные не входят ни в бигармоническое уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений, ни в формулы (13,7), определяющие компоненты  $\sigma_{ik}$  по этой функции (а потому и в граничные условия на краях пластинки).

### Задачи

1. Определить деформацию плоского диска, равномерно вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости.

Решение. Искомое решение отличается лишь значениями постоянных коэффициентов от полученного в задаче 5 § 7 решения для плоской деформации вращающегося цилиндра. Радиальное смещение  $u_r = u(r)$  даётся формулой

$$u = \frac{\Omega^2 (1-\sigma^2)}{8E} r \left( \frac{3+\sigma}{1+\sigma} R^2 - r^2 \right).$$

Это есть выражение, переходящее при замене (13,3) в формулу, полученную в задаче 5 § 7.

2. Определить деформацию полубесконечной пластинки (с прямолинейным краем) под влиянием сосредоточенной силы, приложенной к точке края пластинки и действующей в её плоскости.

Решение. Вводим полярные координаты с углом  $\varphi$ , отсчитываемым от направления действия приложенной силы; он пробегает значения от  $-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  до  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между направлением силы и нормалью к краю пластинки (рис. 6). Во всех точках свободной границы за исключением точки приложения внешней силы (начало координат) должны выполняться условия  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$ . Воспользовавшись выражениями для  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{r\varphi}$ , полученными в задаче II § 7, найдём, что для этого функция напряжений должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{const}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \text{const} \quad \text{при } \varphi = \mp \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Оба эти условия выполняются, если  $\chi = r/\varphi$ . При такой подстановке бигармоническое уравнение

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \chi = 0$$

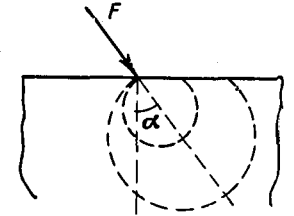


Рис. 6

даёт для  $f(\varphi)$  решения вида  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\varphi \sin \varphi$ ,  $\varphi \cos \varphi$ . Из них первые два фиктивны, так как приводят к тождественно равным нулю напряжениям. Решение, дающее правильное значение приложенной в начале координат силы, есть

$$\chi = -\frac{F}{\pi} r \varphi \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F \cos \varphi}{\pi r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0$$

( $F$ —значение силы, отнесённое к единице толщины пластинки). Действительно, проектируя силы внутренних напряжений на направления, параллельное и перпендикулярное к силе  $F$ , и интегрируя по малой полуокружности с центром в начале координат (радиус которой можно представить себе стремящимся затем к нулю), получим:

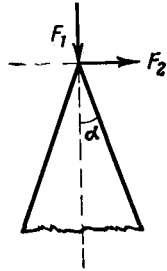


Рис. 7.

$$\int \sigma_{rr} \cos \varphi r d\varphi = -F,$$

$$\int \sigma_{rr} \sin \varphi r d\varphi = 0,$$

т. е. как раз те значения, которые компенсируются приложенной в начале координат внешней силой.

Формулы (1) определяют искомое распределение напряжений. Оно оказывается чисто радиальным: на всякую площадку, перпендикулярную к радиусу, действует только радиальная сжимающая сила. Линиями равных напряжений являются окружности  $r = d \cos \varphi$ , проходящие через начало координат и имеющие центры на прямой, вдоль которой действует сила  $F$  (рис. 6).

Компоненты тензора деформации

$$u_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}, \quad u_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma}{E} \sigma_{rr}, \quad u_{r\varphi} = 0.$$

Отсюда интегрированием (с помощью выражений (1,8) для компонент  $u_{ik}$  в полярных координатах) можно найти вектор смещения:

$$u_r = -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \frac{r}{a} - \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} \varphi \sin \varphi,$$

$$u_\varphi = \frac{2\sigma F}{\pi E} \sin \varphi + \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{r}{a} \sin \varphi + \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Постоянные интегрирования выбраны здесь таким образом, чтобы исключить перемещение (перенос или поворот) пластинки как целого; именно, предполагается несмещённой некоторая условно выбранная точка, находящаяся на расстоянии  $a$  от начала координат на линии действия силы.

С помощью полученного решения можно построить решение для произвольного распределения сил, действующих на край пластинки (ср. § 8). Само по себе оно, разумеется, неприменимо в непосредственной окрестности начала координат.

3. Определить деформацию бесконечной клиновидной пластинки (с углом  $2\alpha$  при вершине) под влиянием силы, приложенной к её вершине.

Решение. Распределение напряжений определяется формулами, отличающимися от полученных в предыдущей задаче лишь нормировкой. Если сила действует вдоль средней линии клина (сила  $F_1$  на рис. 7), то имеем:

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_1 \cos \varphi}{r(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha)}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0.$$

Если же сила действует в перпендикулярном направлении ( $F_2$  на рис. 7), то

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_2 \cos \varphi}{r(\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)}.$$

В каждом из этих двух случаев угол  $\varphi$  отсчитывается от соответствующего направления действия силы.

4. Определить деформацию круглого диска (радиуса  $R$ ), сжатого двумя равными и противоположными силами  $Fh$ , приложенными к двум концам диаметра (рис. 8).

Решение. Решение задачи получается путём наложения трёх распределений внутренних напряжений. Два распределения:

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = -\frac{2F \cos \varphi_1}{\pi r_1}, \quad \sigma_{r_1 \varphi_1}^{(1)} = \sigma_{\varphi_1 r_1}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{2F \cos \varphi_2}{\pi r_2}, \quad \sigma_{r_2 \varphi_2}^{(2)} = \sigma_{\varphi_2 r_2}^{(2)} = 0,$$

где  $r_1$ ,  $\varphi_1$  и  $r_2$ ,  $\varphi_2$  — полярные координаты произвольной точки  $P$  с началами соответственно в точках  $A$  и  $B$  (это есть напряжения, которые возникли бы от нормальной силы  $F$ , приложенной к точке на границе полуплоскости, см. задачу 2). Третье распределение

$$\sigma_{ik}^{(3)} = \frac{F}{\pi R} \delta_{ik}$$

представляет собой равномерное растяжение определённой интенсивности. Действительно, если точка  $P$  лежит на окружности края диска, то для неё  $r_1 = 2R \cos \varphi_1$ ,  $r_2 = 2R \cos \varphi_2$ , так что

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{F}{\pi R}.$$

Поскольку направления  $r_1$  и  $r_2$  в этой точке взаимно перпендикулярны, то мы видим, что первые две системы напряжений приводят на краю диска к равномерному сжатию; эти силы как раз компенсируются равномерным растяжением третьей системы, так что край диска оказывается, как и следовало, свободным от напряжений.

5. Определить распределение напряжений в неограниченной пластинке с круглым отверстием (радиуса  $R$ ), подвергаемой равномерному растяжению.

Решение. Равномерному растяжению сплошной пластинки соответствуют напряжения  $\sigma_{xx}^{(0)} = T$ ,  $\sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0$ , где  $T$  — растягивающая сила. Им отвечает функция напряжений

$$\chi^{(0)} = \frac{T}{2} y^2 = \frac{T}{2} r^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} T r^2 (1 - \cos 2\varphi).$$

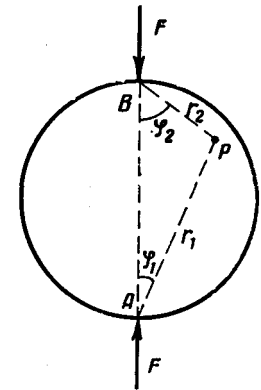


Рис. 8.

При наличии круглого отверстия (с центром в начале полярных координат  $r, \varphi$ ) ищем функцию напряжений в виде

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}, \quad \chi^{(1)} = f(r) + F(r) \cos 2\varphi.$$

Не зависящий от  $\varphi$  интеграл бигармонического уравнения имеет вид

$$f(r) = ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r,$$

а в интеграле, пропорциональном  $\cos 2\varphi$ :

$$F(r) = dr^2 + er^4 + \frac{g}{r^2}.$$

Входящие сюда постоянные определяются условиями  $\sigma_{ik}^{(1)} = 0$  при  $r = \infty$  и  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$  при  $r = R$ . В результате получим:

$$\chi^{(1)} = \frac{TR^2}{2} \left[ -\ln r + \left(1 - \frac{R^2}{2r^2}\right) \cos 2\varphi \right],$$

и распределение напряжений определяется так:

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{3R^2}{r^2}\right) \cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{T}{2} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\varphi\right], \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{T}{2} \left[1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right] \sin 2\varphi.$$

В частности, на границе отверстия  $\sigma_{\varphi\varphi} = T(1 - 2 \cos 2\varphi)$ , а при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$   $\sigma_{\varphi\varphi} = 3T$ , т. е. в три раза превосходит напряжения на бесконечности (ср. задачу 12 § 7).

#### § 14. Сильный изгиб пластинок

Изложенная в §§ 11—13 теория изгиба тонких пластинок применима лишь к достаточно слабым изгибам. Забегая вперед, укажем уже здесь, что условием применимости этой теории является малость прогиба  $\zeta$  по сравнению с толщиной  $h$  пластинки. Теперь мы перейдем к выводу уравнений равновесия сильно изогнутой пластинки. Прогиб  $\zeta$  при этом уже не предполагается малым по сравнению с  $h$ . Подчеркиваем, однако, что самая деформация по-прежнему должна быть мала в том смысле, что тензор деформации должен быть мал. Практически это обычно означает требование  $\zeta \ll l$ , т. е. прогиб должен быть мал по сравнению с размерами  $l$  пластинки.

Изгиб пластинки сопровождается, вообще говоря, её общим растяжением<sup>1)</sup>. В случае слабого изгиба этим растяжением можно пренебречь. При сильном же изгибе этого уже отнюдь нельзя сделать; в сильно изогнутой пластинке не существует поэтому никакой «нейтральной поверхности». Наличие растяжения, сопровождающего изгиб, является специфической особенностью пластинок, отличающей

<sup>1)</sup> Исключением является, например, изгиб плоской пластинки в цилиндрическую поверхность.

их от тонких стержней, которые могут быть подвергнуты сильному изгибу, не испытывая при этом общего растяжения. Это свойство пластинок является чисто геометрическим. Пусть, например, плоская круглая пластинка изгибается в поверхность шарового сегмента. Если произвести изгиб так, чтобы длина окружности осталась неизменной, то должен растянуться её диаметр. Если же диаметр пластинки не растягивается, то должна сжаться длина её окружности.

Вычисленная нами в § 11 энергия (11,6), которую можно назвать энергией чистого изгиба, представляет собой лишь ту часть полной энергии, которая обусловлена неравномерностью растяжения и сжатия вдоль толщины пластинки при отсутствии какого-либо полного её растяжения. Наряду с этой энергией в полную энергию входит ещё часть, обусловленная как раз наличием этого общего растяжения; её можно назвать энергией растяжения.

Деформации чистого изгиба и чистого растяжения были рассмотрены нами соответственно в §§ 11, 12 и 13. Поэтому теперь мы можем непосредственно воспользоваться полученными там результатами. При этом отпадает необходимость в рассмотрении структуры пластинки по её толщине, и мы можем сразу рассматривать пластинку как двухмерную поверхность, не обладающую толщиной.

Предварительно выведем выражение для тензора деформации, определяющего растяжение пластинки (рассматриваемой как поверхность), подвергнутой одновременному изгибу и растяжению в своей плоскости. Пусть  $\mathbf{u}$  есть двухмерный вектор смещения (с компонентами  $u_x, u_y$ ) при чистом растяжении;  $\zeta$  по-прежнему обозначает поперечное смещение при изгибе. Тогда элемент длины  $dl^2 = dx^2 + dy^2$  недеформированной пластинки перейдет после деформации в элемент  $dl'^2$ , квадрат которого равен

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + d\zeta^2.$$

Написав здесь  $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$  и аналогично для  $du_y$  и  $d\zeta$ , получим с точностью до членов более высокого порядка

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta,$$

где двухмерный тензор деформации определяется как

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta}. \quad (14,1)$$

(В этом и следующем параграфах мы будем обозначать посредством греческих букв индексы, пробегающие всего два значения  $x$  и  $y$ ; по дважды повторяющимся индексам, как всегда, подразумевается суммирование.) Члены, квадратичные по производным от  $u_\alpha$ , здесь



опущены; того же самого с производными от  $\zeta$  сделать, разумеется, нельзя, поскольку членов первого порядка по ним вообще не имеется.

Тензор напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$ , связанный с растяжением пластинки, определяется формулами (13,2), в которых вместо  $u_{\alpha\beta}$  надо подставить полный тензор деформации, определяемый согласно формуле (14,1). Энергия чистого изгиба определяется формулой (11,6), которую мы напомним условно в виде

$$\int \Psi_1(\zeta) dx dy,$$

где  $\Psi_1(\zeta)$  обозначает всё выражение, стоящее под интегралом (11,6). Энергия же растяжения, отнесённая к единице объёма пластинки, есть согласно общим формулам  $\frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}$ . Энергия, приходящаяся на единицу поверхности, получается отсюда умножением на  $h$ , так что полная энергия растяжения может быть написана в виде

$$\int \Psi_2(u_{\alpha\beta}) df,$$

где

$$\Psi_2 = h \frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}. \quad (14,2)$$

Таким образом, полная свободная энергия сильно изогнутой пластинки есть

$$F_{пл} = \int [\Psi_1(\zeta) + \Psi_2(u_{\alpha\beta})] df. \quad (14,3)$$

Раньше чем перейти к выводу уравнений равновесия, оценим обе части энергии. Первые производные от  $\zeta$  — порядка  $\frac{\zeta}{l}$ , где  $l$  — размеры пластинки, а вторые — порядка  $\frac{\zeta}{l^2}$ . Поэтому из (11,6) видно, что  $\Psi_1 \sim Eh^3 \frac{\zeta^2}{l^4}$ . Порядок же величины тензора  $u_{\alpha\beta}$  есть  $\frac{\zeta^2}{l^2}$ , и поэтому  $\Psi_2 \sim Eh \frac{\zeta^4}{l^4}$ . Сравнение обоих этих выражений показывает, что пренебрежение  $\Psi_2$ , делаемое в приближённой теории изгиба пластинок, законно только при условии  $\zeta^2 \ll h^2$ .

Условие минимальности энергии гласит:  $\delta F + \delta U = 0$ , где  $U$  — потенциальная энергия в поле внешних сил. Мы будем считать, что действием внешних растягивающих сил, если таковые имеются, можно пренебречь по сравнению с силами изгибающими. (Это можно всегда сделать, если только растягивающие силы не слишком велики, поскольку тонкая пластинка гораздо легче подвергается изгибу, чем растяжению.) Тогда для  $\delta U$  имеем то же выражение, что и в § 12:

$$\delta U = - \int P \delta \zeta df,$$

где  $P$  — внешняя сила, отнесённая к единице поверхности пластинки. Вариация интеграла  $\int \Psi_1 df$  была уже вычислена в § 12 и равна

$$\delta \int \Psi_1 df = \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta df.$$

Интегралы по контуру, стоящие в формуле (12,3), мы не пишем, поскольку они определяют не самое уравнение равновесия, а только граничные условия к нему, которыми мы не станем здесь интересоваться.

Наконец, вычислим вариацию интеграла  $\int \Psi_2 df$ . Варьирование в нём должно производиться как по компонентам вектора  $\mathbf{u}$ , так и по  $\zeta$ . Имеем:

$$\delta \int \Psi_2 df = \int \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} \delta u_{\alpha\beta} df.$$

Производные от свободной энергии единицы объёма по  $u_{\alpha\beta}$  равны  $\sigma_{\alpha\beta}$ ; поэтому  $\frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} = h \sigma_{\alpha\beta}$ . Подставляя также для  $u_{\alpha\beta}$  выражение (14,1), получаем:

$$\delta \int \Psi_2 df = h \int \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta} df = \frac{h}{2} \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right\} df,$$

или ввиду симметричности  $\sigma_{\alpha\beta}$ :

$$\delta \int \Psi_2 df = h \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right\} df.$$

Интегрируя теперь по частям, получаем:

$$\delta \int \Psi_2 df = -h \int \left[ \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) \delta \zeta \right] df.$$

Интегралы по контуру, огибающему поверхность пластинки, мы опять не пишем.

Сводя вместе все полученные выражения, имеем:

$$\begin{aligned} \delta F_{пл} + \delta U &= \\ &= \int \left\{ \left[ \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) - P \right] \delta \zeta - h \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha \right\} df = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы это соотношение имело место тождественно, должны обращаться в нуль отдельно коэффициенты при  $\delta \zeta$  и при  $\delta u_\alpha$ . Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) = P, \quad (14,4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (14,5)$$

В эту систему входят в качестве неизвестных функций три величины: две компоненты  $u_x$ ,  $u_y$  вектора  $u$  и поперечное смещение  $\zeta$ . Её решение определяет одновременно форму изогнутой пластинки (т. е. функцию  $\zeta(x, y)$ ) и возникающее в результате изгиба растяжение. Уравнения (14,4) и (14,5) могут быть несколько упрощены посредством введения в них функции  $\chi$ , связанной с  $\sigma_{\alpha\beta}$  соотношениями (13,7). После подстановки (13,7) в уравнение (14,4) оно приводится к виду

$$\frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = P. \quad (14,6)$$

Что касается уравнений (14,5), то выражениями (13,6) они удовлетворяются автоматически. Поэтому необходимо вывести ещё одно уравнение, которое может быть получено исключением  $u_\alpha$  из соотношений (13,7) и (13,2).

Для этого поступаем следующим образом. Выражаем  $u_{\alpha\beta}$  через  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Из (13,2) получаем:

$$u_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}), \quad u_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \sigma \sigma_{xx}), \quad u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xy}.$$

Подставляя сюда для  $u_{\alpha\beta}$  выражение (14,1), а для  $\sigma_{\alpha\beta}$  — выражения (13,7), находим равенства:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}.$$

Применим к первому операцию  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , ко второму  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , к третьему  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ , после чего сложим первое со вторым и вычтем третье. Тогда члены, содержащие  $u_x$  и  $u_y$ , взаимно сокращаются, и мы получаем уравнение

$$\Delta^2 \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0. \quad (14,7)$$

Уравнения (14,6) и (14,7) представляют собой полную систему уравнений сильного изгиба тонких пластинок (А. Феппль, 1907). Эти уравнения весьма сложны и не могут быть решены точно даже в простейших случаях. Обращаем внимание на то, что они нелинейны.

Упомянем коротко об особом случае деформаций тонких пластинок — о так называемых мембранах. Мембраной называют тонкую пластинку, подвергнутую сильному растяжению приложенными к её

краям внешними растягивающими силами. В таком случае можно пренебречь дополнительными продольными натяжениями, возникающими при изгибе пластинки, и соответственно этому можно считать, что компоненты тензора  $\sigma_{\alpha\beta}$  равны просто постоянным внешним растягивающим напряжениям. В уравнении (14,4) можно теперь пренебречь первым членом по сравнению со вторым, и мы получаем уравнение равновесия:

$$h \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + P = 0 \quad (14,8)$$

с граничным условием  $\zeta = 0$  на контуре края мембраны. Это уравнение линейно. В особенности прост случай изотропного растяжения, когда натяжение мембраны одинаково по всем направлениям. Пусть  $T$  есть абсолютная величина приложенной к краю пластинки растягивающей силы, отнесённой к единице длины этого края. Тогда  $h \sigma_{\alpha\beta} = T \delta_{\alpha\beta}$ , и мы получаем уравнение равновесия в виде

$$T \Delta \zeta + P = 0. \quad (14,9)$$

#### Задачи

1. Определить зависимость величины прогиба пластинки от действующей на неё силы при изгибе настолько сильном, что  $\zeta \gg h$ .

Решение. Оценка членов уравнения (14,7) показывает, что  $\chi \sim E \zeta^2$ . При  $\zeta \gg h$  первый член в (14,6) мал по сравнению со вторым, который имеет порядок величины  $\frac{h \zeta \chi}{l^4} \sim \frac{E h \zeta^3}{l^4}$  ( $l$  — размеры пластинки). Сравнивая с внешней силой  $P$ , получаем:

$$\zeta \sim \left( \frac{l^4 P}{E h} \right)^{1/3}.$$

Отсюда, в частности, видно, что  $\zeta$  пропорционально кубическому корню из силы.

2. Определить деформацию круглой мембраны (радиуса  $R$ ), расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Имеем  $P = \rho gh$ ; в полярных координатах (14,9) принимает вид  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = - \frac{\rho gh}{T}$ . Решение, конечное при  $r = 0$  и удовлетворяющее условию  $\zeta = 0$  при  $r = R$ , есть

$$\zeta = \frac{\rho gh}{4T} (R^2 - r^2).$$

## § 15. Деформации оболочек

Говоря до сих пор о деформациях тонких пластинок, мы всегда подразумевали, что в недеформированном состоянии пластинка является плоской. Между тем деформации пластинок, обладающих в своём естественном состоянии искривлённой формой (такие пластинки называют *оболочками*), обнаруживают особенности, принципиально отличающие их от деформаций плоских пластинок.

Растяжение, сопровождающее изгиб плоской пластинки, является эффектом второго порядка малости по сравнению с величиной самого прогиба. Это проявляется, например, в том, что тензор деформации (14,1), определяющий такое растяжение, квадратичен по  $\xi$ . Совершенно иное положение имеет место при деформациях оболочек: здесь растяжение есть эффект первого порядка и потому играет существенную роль даже при слабом изгибе. Проще всего это свойство видно уже из самого простого примера равномерного растяжения сферической оболочки. Если все её точки подвергаются одинаковому радиальному смещению  $\zeta$ , то увеличение длины экватора равно  $2\pi\zeta$ . Относительное растяжение  $\frac{2\pi\zeta}{2\pi R} = \frac{\zeta}{R}$ , а потому и тензор деформации пропорциональны первой степени  $\zeta$ . Этот эффект стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , т. е. при стремлении кривизны к нулю, и является, таким образом, специфическим свойством, связанным с кривизной оболочки.

Пусть  $R$  есть порядок величины радиуса кривизны оболочки, совпадающей обычно с порядком величины её размеров. Тогда тензор деформации растяжения, сопровождающего изгиб, — порядка  $\frac{\zeta}{R}$ , соответствующий тензор напряжений  $\sim E \frac{\zeta}{R}$ , а энергия деформации (отнесённая к единице площади) согласно (14,2) — порядка  $Eh \left(\frac{\zeta}{R}\right)^2$ . Энергия же чистого изгиба по-прежнему порядка  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{R^4}$ . Мы видим, что отношение первой ко второй порядка  $\left(\frac{R}{h}\right)^2$ , т. е. очень велико. Подчеркнём, что это имеет место независимо от соотношения между величиной  $\zeta$  изгиба и толщиной  $h$ , в то время как при изгибе плоских пластинок растяжение начинало играть роль только при  $\zeta \sim h$ .

В некоторых случаях может существовать особый тип изгиба оболочек, при котором никакого растяжения не происходит вовсе. Так, например, цилиндрическая оболочка (с открытыми обоими концами цилиндра) может быть деформирована без растяжения, если все образующие цилиндра остаются при изгибе параллельными друг другу (т. е. оболочка как бы вдавливается по какой-нибудь из образующих). Такие деформации без растяжения геометрически возможны, если оболочка имеет свободные края (т. е. не замкнута) или же если оболочка замкнута, но её кривизна в разных местах имеет разный знак. Например, замкнутая сферическая оболочка не может быть изогнута без растяжения, если же в ней прорезано отверстие (причём его края не закреплены), то такие деформации становятся возможными. Поскольку энергия чистого изгиба мала по сравнению с энергией растяжения, то ясно, что если данная оболочка допускает деформации без растя-

жения, то именно такие деформации и будут, вообще говоря, реально осуществляться при воздействии на неё произвольных внешних сил. Требование отсутствия растяжения при изгибе накладывает существенные ограничения на возможные смещения  $u_\alpha$ . Эти условия являются чисто геометрическими и могут быть выражены в виде дифференциальных уравнений, которые должны содержаться в полной системе уравнений равновесия для таких деформаций. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

Если же деформация оболочки сопровождается растяжением, то напряжения растяжения, вообще говоря, велики по сравнению с напряжениями изгиба и последними можно пренебречь (основанную на таком пренебрежении теории оболочек называют *мембранной*).

Энергия растяжения оболочки может быть вычислена как интеграл

$$F_{\text{пл}} = \frac{h}{2} \int u_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} df, \quad (15,1)$$

взятый по её поверхности. Здесь  $u_{\alpha\beta}$  есть двухмерный ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) тензор деформации в соответствующих криволинейных координатах, а тензор напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  связан с  $u_{\alpha\beta}$  формулами (13,2), которые могут быть написаны в двухмерных тензорных обозначениях как

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\sigma^2} [(1-\sigma) u_{\alpha\beta} + \sigma \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma}]. \quad (15,2)$$

Особого рассмотрения требует случай, когда оболочка подвержена воздействию сосредоточенных сил, направленных в поперечном к оболочке направлении. Такими силами могут являться, в частности, силы реакции, действующие на оболочку со стороны опор в точках (или линиях) закрепления. Сосредоточенные силы производят изгиб оболочки в небольшой области вокруг точек их приложения. Пусть порядок величины этой области для приложенной в точке силы  $f$  есть  $d$  (так что её площадь  $\sim d^2$ ). Поскольку изгиб  $\zeta$  сильно меняется на протяжении расстояний  $d$ , то энергия изгиба (на единицу площади) — порядка величины  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^4}$ , а полная энергия изгиба (на площади  $\sim d^2$ ) — порядка  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^2}$ . Тензор же деформации растяжения по-прежнему  $\sim \frac{\zeta}{R}$ , и полная энергия вызванного сосредоточенной силой растяжения  $\sim Eh \frac{\zeta^2}{R^2} d^2$ . Поскольку энергия изгиба растёт, а энергия растяжения падает с уменьшением  $d$ , то ясно, что при определении деформации вблизи места приложения сосредоточенных сил должны быть учтены обе эти энергии. Величина области изгиба  $d$  определится по порядку

величины из условия минимума суммы этих энергий, откуда

$$d \sim \sqrt{hR}. \quad (15,3)$$

При этом энергия  $\sim Eh^2 \zeta^2 / R$ . Варьируя её по  $\zeta$  и приравнявая работе силы  $f$ , найдём величину прогиба  $\zeta \sim fR / Eh^2$ .

Однако, если действующие на оболочку силы достаточно велики, то в оболочке могут возникнуть выпучивания, существенно меняющие её форму. Определение деформации в зависимости от приложенных нагрузок требует в этом своеобразном случае специального исследования<sup>1)</sup>.

Пусть выпуклая оболочка (с краями, закреплёнными так, чтобы гарантировать её геометрическую нестяжимость) находится под действием большой сосредоточенной силы  $f$ , направленной по внутренней нормали к поверхности. Для простоты будем считать, что оболочка представляет собой часть сферы радиуса  $R$ . Область выпучивания будет шаровым сегментом, близким к зеркальному изображению его первоначальной формы (на рис. 9 изображён меридиональный разрез оболочки). Задача состоит в определении размеров выпучивания в зависимости от величины силы.

Основная часть упругой энергии сконцентрирована в узкой полосе вблизи края области выпучивания, где изгиб оболочки сравнительно велик (будем называть её полосой изгиба и обозначим её ширину через  $d$ ). Оценим эту энергию, причем будем предполагать размеры (радиус) области выпучивания  $r \ll R$ ; тогда угол

$\alpha \ll 1$  (см. рис. 9). При этом  $r = R \sin \alpha \sim R\alpha$ , а глубина прогиба  $H = 2R(1 - \cos \alpha) \sim R\alpha^2$ . Обозначим посредством  $\zeta$  смещение точек оболочки в полосе изгиба. Точно так же, как это было сделано выше, находим, что энергии изгиба вдоль меридиана и растяжения вдоль параллели<sup>2)</sup>, отнесённые к 1 см<sup>2</sup> поверхности, по порядку

<sup>1)</sup> Излагаемые ниже результаты принадлежат А. В. Погорелову (1960). Более точный анализ данного вопроса, а также другие аналогичные задачи, можно найти в его книге «Теория оболочек при закритических деформациях», 1965.

<sup>2)</sup> На изгибе по меридиану кривизна оболочки в первом приближении не сказывается, так что он происходит, как и при цилиндрическом изгибе плоской пластинки, без общего растяжения по меридиану.

величины равны соответственно

$$Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^3} \text{ и } Eh \frac{\zeta^2}{R^2}.$$

Порядок величины смещения  $\zeta$  определяется в данном случае геометрически: направление меридиана меняется на ширине  $d$  на угол  $\sim \alpha$  и потому  $\zeta \sim \alpha d \sim rd/R$ . Умножив также на площадь полосы изгиба ( $\sim rd$ ), получим энергии

$$E \frac{h^3 r^3}{R^2 d} \text{ и } E \frac{hd^3 r^3}{R^4}.$$

Из условия минимальности их суммы снова найдём  $d \sim \sqrt{hR}$ , а полная упругая энергия при этом  $\sim Er^3 (h/R)^{3/2}$  или иначе<sup>1)</sup>:

$$\text{const} \cdot Eh^{3/2} \frac{H^{3/2}}{R}. \quad (15,4)$$

В произведенном выводе подразумевалось, что  $d \ll r$ ; поэтому формула (15,4) справедлива при соблюдении условия<sup>2)</sup>

$$\frac{Rh}{r^2} \ll 1. \quad (15,5)$$

Искомая зависимость между глубиной прогиба  $H$  и приложенной силой  $f$  получится приравниванием  $f$  к производной от энергии (15,4) по  $H$ . Таким образом, найдём:

$$H \sim \frac{f^2 R^2}{E^2 h^3}. \quad (15,6)$$

Обратим внимание на нелинейный характер этой зависимости.

Наконец, пусть деформация (выпучивание) оболочки происходит под действием равномерного внешнего давления  $p$ . Работа внешних сил в таком случае равна  $p\Delta V$ , где  $\Delta V \sim Hr^2 \sim H^2 R$  — изменение ограничиваемого оболочкой объёма при выпучивании. Приравняв нулю производную по  $H$  от полной свободной энергии (разности

<sup>1)</sup> Более точное вычисление даёт для постоянного коэффициента значение  $\text{const} = 1, 2(1 - \sigma^2)^{-3/4}$ .

<sup>2)</sup> При образовании выпучивания внешние слои шарового сегмента становятся внутренними и соответственно сжимаются, а внутренние слои — внешними и растягиваются. Относительное растяжение (или сжатие)  $\sim h/R$ , так что связанная с ним полная энергия в области выпучивания

$$\sim E \left( \frac{h}{R} \right)^2 hr^2.$$

При условии (15,5) она действительно мала по сравнению с энергией в полосе изгиба (15,4).

упругой энергии (15,4) и этой работы), получим:

$$H \sim \frac{h^5 E^2}{R^4 p^2}. \quad (15,7)$$

Обратный характер зависимости (увеличение  $H$  при уменьшении  $p$ ) указывает на неустойчивость выпученного состояния в этом случае. Определяемое формулой (15,7) значение  $H$  отвечает неустойчивому равновесию при заданном  $p$ : выпучивания с большими значениями  $H$  самопроизвольно растут, а с меньшими — уменьшаются (легко проверить, что (15,7) отвечает максимуму, а не минимуму полной свободной энергии). Существует такое критическое значение внешней нагрузки  $p = p_{кр}$ , за которым самопроизвольно возрастают уже малые изменения формы оболочки. Его можно оценить как то значение  $p$ , при котором формула (15,7) даёт  $H \sim h$ :

$$p_{кр} \sim E \frac{h^2}{R^2}. \quad (15,8)$$

Мы ограничимся в теории оболочек изложенными краткими сведениями и некоторыми простыми примерами, приведенными в задачах к этому параграфу.

### Задачи

1. Вывести уравнения равновесия для сферической оболочки (радиуса  $R$ ), деформируемой симметрично относительно оси, проходящей через её центр.

Решение. В качестве двухмерных координат на поверхности оболочки пользуемся углами  $\theta, \varphi$  сферической системы координат с началом в центре сферы и полярной осью по оси симметрии деформированной оболочки.

Пусть  $P_r$  — отнесённая к единице поверхности оболочки радиальная внешняя сила. Эта сила должна компенсироваться радиальной равнодействующей сил внутренних напряжений, действующих на элемент оболочки в тангенциальных к нему направлениях. Соответствующее условие гласит:

$$\frac{h}{R} (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}) = P_r. \quad (1)$$

Это уравнение в точности аналогично известному уравнению Лапласа, определяющему разность давлений двух сред, связанную с действующим в поверхности их раздела поверхностным напряжением.

Пусть, далее,  $Q_z(\theta)$  есть направленная вдоль полярной оси (оси  $z$ ) равнодействующая всех внешних сил, действующих на часть оболочки, расположенную над параллельным кругом  $\theta = \text{const}$ . Эта сила должна компенсироваться проекцией на ось  $z$  напряжений  $2\pi R \sin \theta \sigma_{\theta\theta}$ , действующих на сечение  $2\pi R h \sin \theta$  оболочки по указанной окружности. Отсюда

$$2\pi R h \sin^2 \theta \sigma_{\theta\theta} = Q_z(\theta). \quad (2)$$

Уравнениями (1) и (2) определяется распределение напряжений, после чего тензор деформации находится по формулам

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}), \quad u_{\theta\varphi} = 0, \quad (3)$$

а затем вектор смещения с помощью уравнений

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{du_{\theta}}{d\theta} + u_r \right), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} (u_{\theta} \operatorname{ctg} \theta + u_r). \quad (4)$$

2. Определить деформацию под влиянием собственного веса полусферической оболочки, расположенной куполом вверх; края купола свободно перемещаются по горизонтальной опоре (рис. 10).

Решение. Имеем:

$$P_r = -\rho g h \cos \theta,$$

$$Q_z = -2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \rho g h$$

( $Q_z$  есть полный вес оболочки над окружностью  $\theta = \text{const}$ ). Из (1) и (2) находим:

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{R \rho g}{1 + \cos \theta},$$

$$\sigma_{rr} = R \rho g \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right).$$

По формулам (3) вычисляем  $u_{\varphi\varphi}$  и  $u_{\theta\theta}$ , после чего из уравнений (4) вычисляем  $u_{\theta}$  и  $u_r$  (постоянная, возникающая при интегрировании первого из

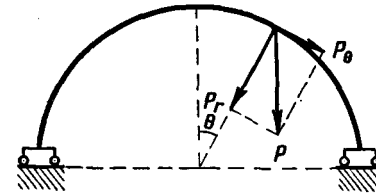


Рис. 10.

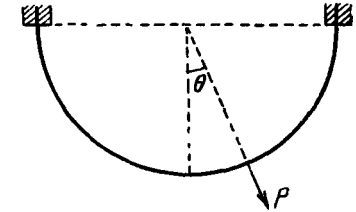


Рис. 11.

этих уравнений, определяется так, чтобы при  $\theta = \pi/2$  было  $u_{\theta} = 0$ ). В результате получим:

$$u_{\theta} = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln (1 + \cos \theta) \right] \sin \theta,$$

$$u_r = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[ 1 - \frac{2 + \sigma}{1 + \sigma} \cos \theta - \cos \theta \ln (1 + \cos \theta) \right].$$

Значение  $u_r$  при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  даёт горизонтальное смещение опоры.

3. Определить деформацию полусферической оболочки с закреплёнными краями, расположенной куполом вниз и наполненной жидкостью (рис. 11); весом самой оболочки можно пренебречь по сравнению с весом жидкости.

Решение. Имеем:

$$P_r = \rho_0 g R \cos \theta, \quad P_\theta = 0,$$

$$Q_z = 2\pi R^2 \int_0^\theta P_r \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi R^3 \rho_0 g}{3} (1 - \cos^3 \theta)$$

( $\rho_0$  — плотность жидкости). Далее, по формулам (1) и (2) находим:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R^3 \rho_0 g}{3h} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R^3 \rho_0 g}{3h} \frac{(-1 + 3 \cos \theta - 2 \cos^3 \theta)}{\sin^2 \theta}.$$

Для смещений получается:

$$u_\theta = -\frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \sin \theta \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln(1 + \cos \theta) \right],$$

$$u_r = \frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \left[ \cos \theta \ln(1 + \cos \theta) - 1 + \frac{3 \cos \theta}{1 + \sigma} \right].$$

При  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $u_r$  остаётся конечным, а не обращается в нуль, как должно было быть. Это значит, что в действительности вблизи линии закрепления оболочки происходит настолько сильный её изгиб, что полученное решение становится неприменимым.

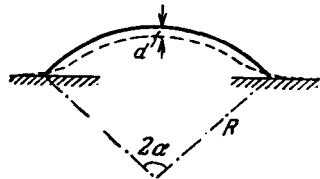


Рис. 12.

4. Оболочка в виде шарового сегмента опирается своими свободными краями на неподвижную опору (рис. 12). Определить величину её прогиба под действием собственно-го веса  $Q$ .

Решение. Основная деформация происходит вблизи краёв, отгибающихся в сторону (пунктирная линия на рис. 12). При этом смещение  $u_\theta$  мало по сравнению с радиальным смещением  $u_r = \zeta$ . Поскольку  $\zeta$  быстро убывает по мере удаления от линии опоры, то возникающую деформацию можно рассматривать как деформацию плоской длинной (длины  $2\pi R \sin \alpha$ ) пластинки. Эта деформация складывается из изгиба и растяжения пластинки. Относительное удлинение пластинки в каждой её точке равно  $\zeta/R$  ( $R$  — радиус оболочки), и потому энергия растяжения (на единицу объёма) есть  $\frac{E\zeta^2}{2R^2}$ . Вводя в качестве независимой переменной расстояние  $x$  от линии опоры, имеем для полной энергии растяжения

$$F_{\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{hE}{2R^2} \int \zeta^2 dx.$$

Энергия же изгиба есть

$$F_{2\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{24(1 - \sigma^2)} \int \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Варьируя сумму  $F_{\text{пл}} = F_{1\text{пл}} + F_{2\text{пл}}$  по  $\zeta$ , получим уравнение

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{12(1 - \sigma^2)}{h^2 R^2} \zeta = 0.$$

При  $x \rightarrow \infty$   $\zeta$  должно стремиться к нулю, а при  $x = 0$  должны выполняться граничные условия равенства нулю момента сил:  $\zeta'' = 0$ , и условие равенства

развивающейся при изгибе силы нормальной к поверхности оболочки компоненте силы тяжести:

$$2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{12(1 - \sigma^2)} \zeta''' = Q \cos \alpha.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta = A e^{-\kappa x} \cos \kappa x,$$

где

$$\kappa = \left[ \frac{3(1 - \sigma^2)}{h^2 R^2} \right]^{1/4}, \quad A = \frac{Q \operatorname{ctg} \alpha}{Eh} \left[ \frac{3R^2(1 - \sigma^2)}{8\pi h^2} \right]^{1/4}.$$

Величина прогиба оболочки есть

$$d = \zeta(0) \cos \alpha = A \cos \alpha.$$

## § 16. Кручение стержней

Перейдём теперь к изучению деформаций тонких стержней. Этот случай отличается от всех ранее рассматривавшихся тем, что вектор смещения  $\mathbf{u}$  может быть большим даже при слабой деформации, т. е. при малом тензоре  $u_{ik}$ <sup>1)</sup>. Так, при слабом сгибании тонкого длинного стержня его концы могут значительно переместиться в пространстве, даже если относительные смещения соседних точек в стержне малы.

Существует два типа деформаций стержней, могущих сопровождаться большим смещением отдельных частей стержня. Одним из них является изгиб стержня, а вторым — его *кручение*. С рассмотрением этого второго случая мы и начнём.

Деформация кручения заключается в том, что в стержне, остающемся при этом прямым, каждое поперечное сечение поворачивается относительно ниже лежащих на некоторый угол. Если стержень длинный, то при слабом кручении достаточно удалённые друг от друга сечения могут повернуться на большой угол. Образующие боковой поверхности стержня, параллельные его оси, приобретают при кручении винтовую форму.

Рассмотрим тонкий прямой стержень произвольного сечения. Выберем систему координат с осью  $z$  вдоль оси стержня и началом координат где-нибудь внутри него. Введём *угол кручения*  $\tau$  как угол поворота, отнесённый к единице длины стержня. Это значит, что два бесконечно близких поперечных сечения, находящиеся на расстоянии  $dz$ , поворачиваются друг относительно друга на угол  $d\varphi = \tau dz$  (так что  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$ ). Самая деформация кручения, т. е. относительные

<sup>1)</sup> Исключением является только простое растяжение стержня без изменения его формы, — при слабом растяжении наряду с тензором  $u_{ik}$  всегда мал также и вектор  $\mathbf{u}$ .

смещения соседних частей стержня, предполагаются малыми. Условием этого является малость относительного поворота сечений, удалённых вдоль длины стержня на расстояния порядка его поперечных размеров  $R$ , т. е.

$$\tau R \ll 1. \quad (16,1)$$

Рассмотрим небольшую область длины стержня вблизи начала координат и определим смещения  $\mathbf{u}$  точек стержня в этой области. В качестве несмещённого выберем поперечное сечение стержня в координатной плоскости  $x, y$ . Как известно, при повороте радиус-вектора  $\mathbf{r}$  на малый угол  $\delta\varphi$  смещение его конца определяется формулой

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi \mathbf{r}], \quad (16,2)$$

где  $\delta\varphi$  — вектор с абсолютной величиной, равной углу поворота, направленный вдоль оси, вокруг которой производится поворот. В нашем случае поворот производится вокруг оси  $z$ , причём для точек с координатой  $z$  угол поворота относительно плоскости  $x, y$  равен  $\tau z$  (угол  $\tau$  в области вблизи начала координат можно рассматривать как постоянный). Формула (16,2) даёт теперь для компонент  $u_x, u_y$  вектора смещения

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x. \quad (16,3)$$

При кручении стержня его точки испытывают, вообще говоря, также и смещение вдоль оси  $z$ . Поскольку при  $\tau = 0$  это смещение отсутствует, то при малых  $\tau$  его можно считать пропорциональным  $\tau$ . Таким образом,

$$u_z = \tau\psi(x, y), \quad (16,4)$$

где  $\psi(x, y)$  — некоторая функция от  $x$  и  $y$ , называемая функцией кручения. В результате описываемой формулами (16,3) и (16,4) деформации каждое поперечное сечение стержня поворачивается вокруг оси  $z$ , одновременно искривляясь, переставая быть плоским. Следует заметить, что, выбрав определённым образом начало координат в плоскости  $x, y$ , мы тем самым «закрепляем» определённую точку сечения стержня так, что она не смещается в этой плоскости (смещаясь, однако, вдоль оси  $z$ ); изменение выбора начала координат не отразилось бы, разумеется, на самой деформации кручения, приведя лишь к несущественному общему смещению стержня как целого.

Зная  $\mathbf{u}$ , можно найти компоненты тензора деформации. Поскольку  $\mathbf{u}$  в рассматриваемой области мало, то можно воспользоваться формулой  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ . В результате находим:

$$\begin{aligned} u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0, \\ u_{xz} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right), \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (16,5)$$

Обращаем внимание на то, что  $u_{ii} = 0$ ; другими словами, кручение не сопровождается изменением объёма, т. е. представляет собой деформацию чистого сдвига.

Для компонент тензора напряжений находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \\ \sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (16,6)$$

(здесь удобнее пользоваться модулем сдвига  $\mu$  вместо  $E$  и  $\sigma$ ). Поскольку отличны от нуля только  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$ , то общие уравнения равновесия  $\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  сводятся к уравнению

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} = 0. \quad (16,7)$$

Подставив сюда (16,6), мы найдём, что функция кручения должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\psi = 0, \quad (16,8)$$

где  $\Delta$  — двухмерный оператор Лапласа.

Несколько более удобно, однако, пользоваться другой вспомогательной функцией  $\chi(x, y)$ , определяемой равенствами:

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial\chi}{\partial x}; \quad (16,9)$$

для этой функции получаются более удобные граничные условия на контуре сечения стержня (см. ниже). Сравнивая (16,9) с (16,6), получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = y + 2 \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -x - 2 \frac{\partial\chi}{\partial x}. \quad (16,10)$$

Дифференцируя первое равенство по  $y$ , второе по  $x$  и вычитая одно из другого, получим для функции  $\chi$  следующее уравнение:

$$\Delta\chi = -1. \quad (16,11)$$

Для определения граничных условий на поверхности стержня замечаем, что благодаря малой толщине стержня действующие на его боковую поверхность внешние силы малы по сравнению с возникающими в стержне внутренними напряжениями и потому могут быть положены (при отыскании граничных условий) равными нулю. Это обстоятельство в точности аналогично тому, что мы имели при рассмотрении изгиба тонких пластинок. Таким образом, на боковой поверхности стержня должно быть  $\sigma_{ik}n_k = 0$ ; поскольку ось  $z$  направлена по оси стержня, то вектор нормали  $\mathbf{n}$  имеет только компоненты

$n_x, n_y$ , так что написанное уравнение сводится к условию

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0.$$

Подставляя сюда (16,9), получаем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x} n_y = 0.$$

Но компоненты вектора нормали к плоскому контуру (контур сечения стержня) равны  $n_x = -\frac{dy}{dl}$ ,  $n_y = \frac{dx}{dl}$ , где  $x, y$  — координаты точек контура, а  $dl$  — элемент дуги. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = d\chi = 0,$$

откуда  $\chi = \text{const}$ , т. е. на контуре сечения функция  $\chi$  постоянна. Поскольку в определении (16,9) входят только производные от функции  $\chi$ , то ясно, что к этой функции можно прибавлять любую постоянную. Если контур сечения односвязен, то можно, следовательно, без всякого ограничения общности положить на нём в качестве граничного условия к уравнению (16,11)<sup>1)</sup>

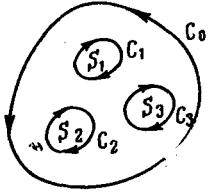


Рис. 13.

В случае же многосвязного контура  $\chi$  будет иметь различные постоянные значения на каждой из замкнутых кривых, составляющих контур. Поэтому положить  $\chi$  равным нулю можно будет лишь на одной из этих кривых, например на внешнем контуре ( $C_0$  на рис. 13). Значения же  $\chi$  на остальных частях контура определяются из условия, являющегося следствием однозначности смещения  $u_z = \tau\psi(x, y)$  как функции координат. Именно, ввиду однозначности функции кручения  $\psi(x, y)$  интеграл от её дифференциала  $d\psi$  по замкнутому контуру должен быть равен нулю. С помощью соотношений (16,10) имеем поэтому

$$\oint d\psi = \oint \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \\ = -2 \oint \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} dy - \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) - 2 \oint (x dy - y dx) = 0,$$

<sup>1)</sup> Задача об определении деформации кручения по уравнению (16,11) с граничным условием (16,12) формально совпадает с задачей об определении формы прогиба равномерно нагруженной плоской мембраны по уравнению (14,9)

Полезно заметить также гидродинамическую аналогию: уравнением вида (16,11) определяется распределение скоростей  $v(x, y)$  вязкой жидкости по сечению трубы, граничному условию (16,12) соответствует условие  $v=0$  на неподвижных стенках трубы (см. «Гидродинамика», § 17).

или

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} dl = -S, \quad (16,13)$$

где  $\frac{\partial \chi}{\partial n}$  есть производная функции  $\chi$  по направлению внешней нормали к контуру, а  $S$  — охватываемая этим контуром площадь. Применяя (16,13) к каждой из замкнутых кривых  $C_1, C_2, \dots$ , мы и получим искомые условия.

Определим свободную энергию подвергнутого кручению стержня. Для энергии единицы объёма имеем:

$$F = \frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2} = \sigma_{xz}u_{xz} + \sigma_{yz}u_{yz} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

и, подставляя сюда (16,9):

$$F = 2\mu\tau^2 \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \equiv 2\mu\tau^2 (\nabla\chi)^2,$$

где  $\nabla$  означает двумерный градиент. Энергия кручения, отнесённая к единице длины стержня, получится отсюда интегрированием по площади поперечного сечения, т. е. равна  $\frac{C\tau^2}{2}$ , где коэффициент  $C$  равен

$$C = 4\mu \int (\nabla\chi)^2 df.$$

Величина  $C$  называется *крутильной жёсткостью* стержня. Полная упругая энергия стержня равна интегралу

$$F_{\text{ст}} = \frac{1}{2} \int C\tau^2 dz, \quad (16,14)$$

взятому по его длине.

Написав

$$(\nabla\chi)^2 = \nabla(\chi\nabla\chi) - \chi\Delta\chi = \nabla(\chi\nabla\chi) + \chi$$

и преобразуя интеграл от первого члена в интеграл по линии контура сечения стержня, получим:

$$C = 4\mu \oint \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} dl + 4\mu \int \chi df. \quad (16,15)$$

Если контур сечения односвязен, то ввиду граничного условия  $\chi=0$  первый член исчезает и остаётся

$$C = 4\mu \int \chi dx dy. \quad (16,16)$$

Для многосвязной же границы (рис. 13), положив  $\chi=0$  на внешнем контуре  $C_0$  и обозначив посредством  $\chi_k$  постоянные значения  $\chi$  на



внутренних контурах  $C_k$ , получим с помощью (16,13)

$$C = 4\mu \sum_k \chi_k S_k + 4\mu \int \chi dx dy \quad (16,17)$$

(следует помнить, что при интегрировании в первом члене в (16,15) контур  $C_0$  обходится в прямом, а контур  $C_k$  — в обратном направлениях).

Рассмотрим наиболее обычный случай кручения, когда один из концов стержня закреплён неподвижно, а внешние силы приложены только к поверхности другого его конца. Эти силы таковы, что производят только кручение стержня без какой бы то ни было другой его деформации, например изгиба. Другими словами, они составляют некоторую пару сил, закручивающую стержень вокруг его оси. Момент этой пары обозначим посредством  $M$ .

Естественно ожидать, что в таком случае угол кручения  $\tau$  постоянен вдоль длины стержня. В этом можно убедиться, например, из условия минимума полной свободной энергии стержня в равновесии. Полная энергия деформированного стержня равна сумме  $F_{ст} + U$ , где  $U$  — потенциальная энергия, обусловленная действием внешних сил. Подставляя в (16,14)  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$  и варьируя по углу  $\varphi$ , находим:

$$\delta \frac{1}{2} \int C \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + \delta U = \int C \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\delta\varphi}{dz} dz + \delta U = 0,$$

или, интегрируя по частям,

$$- \int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta U + C\tau\delta\varphi = 0.$$

В последнем члене слева берётся разность значений на пределах интегрирования, т. е. на концах стержня. Один из этих концов, скажем, нижний, закреплён так, что на нём  $\delta\varphi = 0$ . Что касается вариации  $\delta U$  потенциальной энергии, то, взятая с обратным знаком, она представляет собой работу внешних сил при повороте на угол  $\delta\varphi$ . Как известно из механики, работа пары сил при таком повороте равна произведению  $M\delta\varphi$  угла поворота на момент пары. Поскольку никаких других внешних сил нет, то  $\delta U = -M\delta\varphi$ , и мы получаем:

$$\int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta\varphi (-M + C\tau) = 0. \quad (16,18)$$

Во втором члене берётся его значение на верхнем пределе. В интеграле по  $dz$  вариация  $\delta\varphi$  произвольна, а потому должно быть

$$C \frac{d\tau}{dz} = 0,$$

т. е.

$$\tau = \text{const.} \quad (16,19)$$

Таким образом, угол кручения постоянен вдоль всей длины стержня. Полный угол поворота верхнего основания относительно нижнего равен поэтому просто произведению  $\tau l$  угла  $\tau$  на длину  $l$  стержня.

В уравнении (16,18) должен исчезнуть также и второй член. Отсюда находим следующее выражение для постоянного угла кручения:

$$\tau = \frac{M}{C}. \quad (16,20)$$

### Задачи

1. Определить крутильную жёсткость стержня с круговым сечением (радиуса  $R$ ).

Решение. Решения задач 1—4 формально совпадают с решениями задач о движении вязкой жидкости в трубе соответствующего сечения (см. примечание на стр. 92); количеству  $Q$  протекающей через сечение трубы жидкости соответствует здесь величина  $C$ .

Для стержня кругового сечения имеем (начало координат в центре сечения):

$$\chi = \frac{1}{4} (R^2 - x^2 - y^2).$$

Крутильная жёсткость:

$$C = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Для функции  $\psi$  получаем из (16,10)  $\psi = \text{const}$ . Но постоянная  $\psi$  соответствует согласно (16,4) простому смещению стержня как целого вдоль оси  $z$ ; поэтому можно считать, что  $\psi = 0$ . Таким образом, поперечные сечения кругового стержня при кручении остаются плоскими.

2. То же для стержня эллиптического сечения (полуоси  $a$  и  $b$ ).

Решение. Крутильная жёсткость:

$$C = \pi \mu \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Распределение продольных смещений даётся функцией кручения:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy$$

(оси координат направлены по осям эллипса).

3. То же для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника (длина сторон  $a$ ).

Решение. Крутильная жёсткость:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80} \mu a^4.$$

Функция кручения:

$$\psi = \frac{1}{6a} y (x \sqrt{3} + y) (x \sqrt{3} - y),$$

причём начало координат выбрано в центре треугольника, а ось  $x$  совпадает с одной из его высот.

4. То же для стержня, имеющего вид длинной тонкой пластинки (ширина  $d$ , толщина  $h \ll d$ ).

Решение. Задача эквивалентна задаче о течении вязкой жидкости между плоско-параллельными стенками. Результат:

$$C = \frac{\mu dh^3}{3}.$$

5. То же для цилиндрической трубы (внутренний и внешний радиусы  $R_1$  и  $R_2$ ).

Решение. Функция

$$\chi = \frac{1}{4} (R_2^2 - r^2)$$

(в полярных координатах) удовлетворяет условию (16,13) на обеих границах кольцевого сечения трубы. По формуле (16,17) найдём:

$$C = \mu \pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}.$$

6. То же для тонкостенной трубы произвольного сечения.

Решение. Ввиду тонкости стенки трубы можно считать, что на протяжении её ширины  $h$  функция  $\chi$  меняется от нуля на одной стороне до  $\chi_1$  на другой по линейному закону  $\chi = \chi_1 \frac{y}{h}$  ( $y$  — координата вдоль толщины стенки). Тогда условие (16,13) даёт  $\frac{\chi_1 L}{h} = S$ , где  $L$  — длина периметра сечения трубы, а  $S$  — охватываемая им площадь. В выражении (16,17) второй член мал по сравнению с первым, и мы получаем:

$$C = \frac{4h S^2 \mu}{L}.$$

Если трубу разрезать продольно по одной из её образующих, то крутильная жёсткость резко уменьшается, становясь равной (согласно результату задачи 4)  $C = \frac{\mu L h^3}{3}$ .

## § 17. Изгиб стержней

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других — сжатие. Растянуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие. Как и в случае пластинок, вдоль длины стержня внутри него существует «нейтральная» поверхность, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия. Она отделяет собой области сжатия от областей растяжения.

Начнём с исследования деформации изгиба в небольшом участке длины стержня, в котором изгиб можно считать слабым; под слабым мы понимаем здесь изгиб, при котором мал не только тензор деформации, но и абсолютная величина смещений точек стержня. Выберем систему координат с началом в некоторой точке «нейтральной» поверхности внутри рассматриваемого участка стержня.

Ось  $z$  направим параллельно оси стержня (недеформированного); изгиб пусть происходит в плоскости  $z, x^1$ .

Аналогично тому, что мы имели в случае изгиба пластинок и кручения стержней, и при изгибе тонких стержней внешние силы, действующие на боковую поверхность стержня, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями, и при определении граничных условий на этой поверхности их можно считать равными нулю. Таким образом, вдоль всей боковой поверхности стержня имеем  $\sigma_{ik} n_k = 0$ , или, поскольку  $n_z = 0$ :

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0$$

и аналогично для  $i = y, z$ . Выберем такую точку на контуре поперечного сечения стержня, в которой нормаль  $n$  направлена параллельно оси  $x$ . Другая такая же точка имеется где-нибудь на противоположной стороне контура. В обеих этих точках  $n_y = 0$ , и из написанного выше равенства имеем  $\sigma_{xx} = 0$ . Но поскольку самый стержень предполагается тонким, то, если  $\sigma_{xx}$  исчезает на двух сторонах его сечения, оно мало и вдоль всего сечения, так что можно положить  $\sigma_{xx} = 0$  во всём стержне. Аналогичным образом убеждаемся в том, что все компоненты тензора напряжений должны быть равными нулю за исключением только компоненты  $\sigma_{zz}$ . Другими словами, при изгибе тонкого стержня большой является только растягивающая (или сжимающая) компонента тензора внутренних напряжений. Деформация, в которой отлична от нуля только компонента  $\sigma_{zz}$  тензора напряжений, есть не что иное, как деформация простого растяжения или сжатия (§ 5). Таким образом, в каждом элементе объёма изгибаемого стержня происходит простое растяжение (или сжатие). Самая величина этого растяжения, конечно, различна в разных точках каждого из поперечных сечений стержня, что и приводит в результате к изгибу всего стержня.

Легко определить величину относительного растяжения в каждой точке стержня. Рассмотрим какой-нибудь элемент длины  $dz$ , параллельный оси стержня и находящийся где-нибудь вблизи начала координат. При изгибании стержня длина  $dz$  изменится, сделавшись равной  $dz'$ . Неизменными остаются только те элементы длины, которые расположены на нейтральной поверхности. Пусть  $R$  есть радиус кривизны нейтральной поверхности вблизи начала координат. Длины  $dz$  и  $dz'$  можно рассматривать как элементы дуги

<sup>1)</sup> При слабом изгибании стержня можно считать, что изгиб происходит в одной плоскости. Это связано с известным из дифференциальной геометрии обстоятельством, что отклонение слабо изогнутой кривой от плоскости (так называемое её кручение) является малой величиной высшего порядка по сравнению с кривизной.

окружностей с радиусами соответственно  $R$  и  $R+x$ , где  $x$  — значение координаты  $x$  в точке, в которой выбран элемент  $dz'$ . Поэтому

$$dz' = \frac{R+x}{R} dz = \left(1 + \frac{x}{R}\right) dz.$$

Относительное удлинение равно, следовательно,

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}.$$

С другой стороны, относительное удлинение элемента длины  $dz$  равно компоненте  $u_{zz}$  тензора деформации. Следовательно,

$$u_{zz} = \frac{x}{R}. \quad (17,1)$$

Мы можем написать теперь  $\sigma_{zz}$ , воспользовавшись непосредственно соотношением  $\sigma_{zz} = E u_{zz}$ , имеющим место при простом растяжении. Таким образом,

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R} E. \quad (17,2)$$

До сих пор ещё расположение «нейтральной» поверхности в изогнутом стержне оставалось неопределённым. Его можно определить из условия, что рассматриваемая нами здесь деформация должна представлять собой чистый изгиб, без какого бы то ни было общего растяжения или сжатия стержня. Для этого полная сила внутренних напряжений, действующая на поперечное сечение стержня, должна быть равной нулю, т. е. должен исчезать интеграл

$$\int \sigma_{zz} df,$$

взятый по этой поверхности. В связи с выражением (17,2) для  $\sigma_{zz}$  это приводит к условию

$$\int x df = 0. \quad (17,3)$$

С другой стороны, можно ввести понятие о центре инерции сечения стержня, как о центре инерции однородного плоского диска соответствующей формы. Координаты этого центра определяются, как известно, интегралами

$$\frac{\int x df}{\int df}, \quad \frac{\int y df}{\int df}.$$

Таким образом, условие (17,3) означает, что в системе координат с началом, лежащим на нейтральной поверхности,  $x$  — координата центра инерции сечения стержня равна нулю. Другими словами,

«нейтральная» поверхность проходит через центры инерции поперечных сечений стержня.

Помимо  $u_{zz}$  отличны от нуля ещё две компоненты тензора деформации, так как при простом растяжении имеем  $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$ . Зная тензор деформации, легко найти также и смещения точек. Пишем:

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Интегрирование этих соотношений приводит к следующим выражениям для компонент перемещения:

$$u_x = -\frac{1}{2R} [z^2 + \sigma(x^2 - y^2)],$$

$$u_y = -\sigma \frac{xy}{R}, \quad u_z = \frac{xz}{R}. \quad (17,4)$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю; это значит, что мы закрепляем в пространстве положение начала координат.

Из формул (17,4) видно, что точки, расположенные в поперечном сечении  $z = \text{const} \equiv z_0$ , после изгиба заполняют поверхность

$$z = z_0 + u_z = z_0 \left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении сечения остаются при изгибе плоскими, лишь поворачиваясь на некоторый угол относительно своего первоначального положения. Форма же сечения меняется; так при изгибе стержня прямоугольного сечения (со сторонами  $a$  и  $b$ ) боковые стороны контура сечения  $y = \pm b/2$  после изгиба занимают положения

$$y = \pm \frac{b}{2} + u_y = \pm \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\sigma x}{R}\right),$$

т. е. становятся наклонными, оставаясь прямыми. Верхняя же и нижняя стороны  $x = \pm a/2$  изгибаются в параболические кривые

$$x = \pm \frac{a}{2} + u_x = \pm \frac{a}{2} - \frac{1}{2R} \left[ z_0^2 + \sigma \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

(рис. 14).

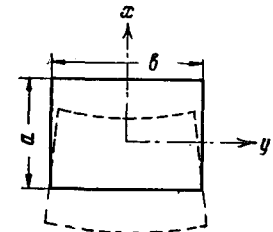


Рис. 14.

Свободная энергия единицы объёма стержня есть

$$\frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2} = \frac{\sigma_{zz}u_{zz}}{2} = \frac{Ex^2}{2R^2}.$$

Интегрируя по всему поперечному сечению стержня, имеем:

$$\frac{E}{2R^2} \int x^2 df. \quad (17,5)$$

Это есть свободная энергия единицы длины изогнутого стержня. Радиус кривизны  $R$  определён здесь как радиус кривизны «нейтральной» поверхности. Но в силу тонкости стержня его можно рассматривать здесь с той же точностью просто как радиус кривизны самого изогнутого стержня, рассматриваемого как не имеющая толщины линия (об этой линии часто говорят как об «упругой линии»).

В выражении (17,5) удобно ввести понятие момента инерции площади поперечного сечения стержня. Именно, определим момент инерции сечения относительно проходящей через его плоскость оси  $y$  как интеграл:

$$I_y = \int x^2 df, \quad (17,6)$$

т. е. аналогично обычному понятию момента инерции с той только разницей, что вместо элемента массы стоит просто элемент поверхности  $df$ . Тогда свободная энергия единицы длины стержня напишется в виде

$$\frac{E}{2R^2} I_y. \quad (17,7)$$

Определим ещё момент сил внутренних напряжений, действующих в данном сечении стержня (этот момент называют изгибающим).

К элементу  $df$  поверхности сечения приложена сила  $\sigma_{zz} df = \frac{x}{R} E df$ , направленная вдоль оси  $z$ . Её момент относительно оси  $y$  есть  $x\sigma_{zz} df$ . Поэтому полный момент сил относительно этой оси есть

$$M_y = \frac{E}{R} \int x^2 df = \frac{EI_y}{R}. \quad (17,8)$$

Таким образом, кривизна  $1/R$  упругой линии пропорциональна действующему в данном сечении изгибающему моменту.

Величина  $I_y$  зависит от того, как направлена ось  $y$  в плоскости сечения. Удобно, как это принято в механике, выражать  $I_y$  через два так называемых главных момента инерции. Если  $\theta$  есть угол между осью  $y$  и одной из главных осей инерции сечения стержня, то, как известно,

$$I_y = I_1 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta, \quad (17,9)$$

где  $I_1, I_2$  — главные моменты инерции. Плоскости, проходящие через ось  $z$  и главные оси инерции сечения стержня, называют главными плоскостями изгиба.

Если, например, сечение стержня является прямоугольником (со сторонами  $a$  и  $b$ ), то его центр инерции находится в центре прямоугольника, а главные оси инерции параллельны его сторонам. Главные моменты инерции равны

$$I_1 = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_2 = \frac{ab^3}{12}. \quad (17,10)$$

При круговом сечении (с радиусом  $R$ ) центр инерции находится в центре круга, а направление главных осей инерции произвольно. Момент инерции вокруг любой оси, проходящей в плоскости сечения через его центр, равен

$$I = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (17,11)$$

## § 18. Энергия деформированного стержня

В предыдущем параграфе мы рассматривали только небольшую область вдоль длины изогнутого стержня. Переходя теперь к исследованию деформации во всём стержне, необходимо начать с выбора подходящего способа описания такой деформации. Существенно, что при сильном<sup>1)</sup> изгибе стержня в нём одновременно возникает, вообще говоря, также и некоторая деформация кручения, так что результирующая деформация есть комбинация чистого изгиба и кручения.

Для описания деформации удобно поступить следующим образом. Разделим весь стержень на ряд бесконечно малых элементов, каждый из которых вырезается из стержня двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. В каждом таком элементе введём свою систему координат  $\xi, \eta, \zeta$ ; направления осей выберем таким образом, чтобы в недеформированном стержне все эти системы были параллельны друг другу, причём все оси  $\zeta$  направлены параллельно оси стержня. При изгибании стержня в каждом элементе система координат поворачивается, причём в различных элементах, вообще говоря, различным образом. Каждые две бесконечно близкие системы оказываются при этом повернутыми друг относительно друга на некоторый бесконечно малый угол.

Пусть  $d\varphi$  есть вектор угла относительного поворота двух систем, находящихся на расстоянии  $dl$  вдоль длины стержня (как

<sup>1)</sup> Напоминаем, что под сильной мы понимаем здесь такую деформацию, при которой вектор  $u$  не мал, тензор же деформации по-прежнему является малым.

известно, бесконечно малый угол поворота можно рассматривать как вектор, направленный вдоль оси поворота; его составляющие представляют собою углы поворота вокруг каждой из трёх осей координат).

Для описания деформации мы введём вектор

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (18,1)$$

определяющий «скорость» поворота осей координат вдоль длины стержня. Если деформация является чистым кручением, то поворот последовательных систем координат происходит только вокруг оси стержня, т. е. вокруг осей  $\zeta$ . В этом случае, следовательно, вектор  $\Omega$  направлен вдоль оси стержня и представляет собой не что иное, как угол кручения  $\tau$ , которым мы пользовались в § 16. Соответственно этому и в общем случае произвольной деформации компоненту  $\Omega_\zeta$  вектора  $\Omega$  можно назвать углом кручения. При чистом же изгибе стержня в одной плоскости вектор  $\Omega$  не имеет компоненты  $\Omega_\zeta$ , т. е. лежит в каждой точке целиком в плоскости  $\xi, \eta$ . Если при этом выбрать плоскость, в которой происходит изгиб, в качестве плоскости  $\xi, \zeta$ , то поворот происходит в каждой точке вокруг оси  $\eta$ , т. е.  $\Omega$  параллелен оси  $\eta$ .

Введём единичный вектор  $t$ , направленный по касательной к стержню, рассматриваемому здесь просто как «упругая линия». Производная  $\frac{dt}{dl}$  называется, как известно, вектором кривизны линии; его абсолютная величина равна  $\frac{1}{R}$ , где  $R$  — радиус кривизны<sup>1)</sup>, а его направление называется направлением главной нормали кривой. Как известно, изменение вектора при бесконечно малом повороте равно векторному произведению вектора угла поворота на сам рассматриваемый вектор. Поэтому для разности векторов  $t$  в двух бесконечно близких точках упругой линии можно написать:

$$dt = [d\varphi t],$$

или, разделив на  $dl$ :

$$\frac{dt}{dl} = [\Omega t]. \quad (18,2)$$

Умножив это равенство с обеих сторон векторно на  $t$ , получаем:

$$\Omega = \left[ t \frac{dt}{dl} \right] + t(t\Omega). \quad (18,3)$$

<sup>1)</sup> Напоминаем, что всякая кривая в пространстве характеризуется в каждой точке своими так называемыми кривизной и кручением. Это кручение (нам не придётся пользоваться им; не следует смешивать с тем, что мы называем здесь деформацией кручения, представляющей собой закручивание стержня вокруг его оси.

Направление вектора касательной в каждой точке совпадает с направлением оси  $\zeta$  в этой же точке. Поэтому  $(t\Omega) = \Omega_\zeta$ . Вводя единичный вектор  $n$  главной нормали (так что  $\frac{dt}{dl} = n \frac{1}{R}$ ), мы можем, следовательно, написать:

$$\Omega = \frac{1}{R} [tn] + t\Omega_\zeta. \quad (18,4)$$

Первый член справа представляет собой вектор с двумя компонентами  $\Omega_\zeta, \Omega_\eta$ . Единичный вектор  $[tn]$  называется, как известно, единичным вектором бинормали. Таким образом, компоненты  $\Omega_\zeta, \Omega_\eta$  образуют вектор, направленный по бинормали к стержню и по абсолютной величине равный его кривизне  $\frac{1}{R}$ .

Введя, таким образом, вектор  $\Omega$ , характеризующий деформацию, и выяснив его свойства, мы можем вывести выражение для упругой свободной энергии изогнутого стержня. Упругая энергия (отнесённая к единице длины стержня) является квадратичной функцией деформации, т. е. в данном случае квадратичной функцией компонент вектора  $\Omega$ . Легко видеть, что в этой квадратичной форме должны отсутствовать члены, пропорциональные  $\Omega_\zeta\Omega_\zeta$  или  $\Omega_\eta\Omega_\eta$ . Действительно, поскольку стержень однороден вдоль всей своей длины, то все величины, в частности и энергия, не должны меняться при изменении направления положительного отсчёта координаты  $\zeta$ , т. е. при замене  $\zeta$  на  $-\zeta$ ; указанные же произведения при такой замене переменяли бы свой знак.

Что касается члена с квадратом  $\Omega_\zeta^2$ , то надо помнить, что при  $\Omega_\zeta = \Omega_\eta = 0$  мы имеем дело с чистым кручением, и тогда выражение для энергии должно совпасть с выражением, полученным в § 16. Таким образом, соответствующий член в свободной энергии имеет вид

$$\frac{C\Omega_\zeta^2}{2}.$$

Наконец, члены, квадратичные по  $\Omega_\zeta, \Omega_\eta$ , можно написать, исходя из выражения (17,7) для энергии слабо изогнутого небольшого участка стержня. Предположим, что стержень подвергается лишь слабому изгибу. Плоскость  $\xi, \zeta$  выберем в плоскости изгиба так, что компонента  $\Omega_\zeta$  исчезает; кручение также отсутствует при слабом изгибе. Выражение для энергии должно в этом случае совпадать с (17,7):

$$\frac{E}{2R^2} I_\eta.$$

Но мы видели, что  $\frac{1}{R^2}$  является как раз квадратом плоского

вектора  $(\Omega_\xi, \Omega_\eta)$ . Поэтому энергия должна иметь вид

$$\frac{E}{2} I_\eta \Omega_\eta^2.$$

При произвольном выборе осей  $\xi, \eta$  это выражение напишется, как известно из механики, в виде

$$\frac{E}{2} (I_{\eta\eta} \Omega_\eta^2 + 2I_{\eta\xi} \Omega_\eta \Omega_\xi + I_{\xi\xi} \Omega_\xi^2),$$

где  $I_{\eta\eta}, I_{\eta\xi}, I_{\xi\xi}$  — компоненты тензора инерции сечения стержня. Удобно выбрать оси  $\xi, \eta$  так, чтобы они совпали с главными осями инерции сечения стержня. Тогда мы будем иметь просто

$$\frac{E}{2} (I_1 \Omega_\xi^2 + I_2 \Omega_\eta^2),$$

где  $I_1, I_2$  — главные моменты инерции сечения. Поскольку коэффициенты при  $\Omega_\xi^2$  и  $\Omega_\eta^2$  — постоянные, то полученное выражение должно иметь место и при сильном изгибе.

Наконец, интегрируя по всей длине стержня, получим окончательно следующее выражение для свободной упругой энергии изогнутого стержня:

$$F_{ст} = \int \left\{ \frac{I_1 E}{2} \Omega_\xi^2 + \frac{I_2 E}{2} \Omega_\eta^2 + \frac{C}{2} \Omega_\zeta^2 \right\} dl. \quad (18,5)$$

Далее, выразим через  $\Omega$  момент сил, действующих на сечение стержня. Это легко сделать, используя опять результаты, полученные ранее для чистого кручения и слабого чистого изгиба. При чистом кручении момент сил относительно оси стержня равен  $C\tau$ . Поэтому заключаем, что в общем случае момент  $M_\zeta$  относительно оси  $\zeta$  должен быть равен  $M_\zeta = C\Omega_\zeta$ . Далее, при слабом изгибе в плоскости  $\xi, \zeta$  момент относительно оси  $\eta$  есть  $\frac{EI_2}{R}$ . Но при та-

ком изгибе вектор  $\Omega$  направлен по оси  $\eta$ , так что  $\frac{1}{R}$  есть просто его абсолютная величина и  $\frac{EI_2}{R} = EI_2 \Omega$ . Поэтому заключаем, что в общем случае должно быть  $M_\xi = EI_1 \Omega_\xi, M_\eta = EI_2 \Omega_\eta$  (оси  $\xi, \eta$  выбраны по главным осям инерции сечения). Таким образом, компоненты вектора  $\mathbf{M}$  момента сил равны

$$M_\xi = EI_1 \Omega_\xi, \quad M_\eta = EI_2 \Omega_\eta, \quad M_\zeta = C\Omega_\zeta. \quad (18,6)$$

Упругая энергия (18,5), выраженная через момент сил, имеет вид

$$F_{ст} = \int \left\{ \frac{M_\xi^2}{2I_1 E} + \frac{M_\eta^2}{2I_2 E} + \frac{M_\zeta^2}{2C} \right\} dl. \quad (18,7)$$

Важным случаем изгиба стержней является слабый изгиб, при котором на всём протяжении стержня отклонение его от первоначального положения мало по сравнению с длиной стержня. В этом случае кручение можно считать отсутствующим, так что можно положить  $\Omega_\zeta = 0$  и из (18,4) имеем просто

$$\Omega = \frac{1}{R} [\text{tg}] \equiv \left[ t \frac{dt}{dl} \right]. \quad (18,8)$$

Введём неподвижную в пространстве систему координат  $x, y, z$  с осью  $z$  вдоль оси недеформированного стержня (вместо связанных в каждой точке со стержнем координат  $\xi, \eta, \zeta$ ). Обозначим посредством  $X, Y$  координаты  $x, y$  точек упругой линии стержня;  $X$  и  $Y$  определяют смещение точек линии от их первоначального положения до изгиба.

Ввиду того что изгиб слаб, вектор касательной  $t$  почти параллелен оси  $z$ , так что приближённо можно считать его направленным вдоль этой оси. Далее, единичный вектор касательной равен, как известно, производной

$$t = \frac{dr}{dl}$$

от радиус-вектора  $r$  точек кривой по её длине. Поэтому имеем:

$$\frac{dt}{dl} = \frac{d^2 r}{dl^2} \approx \frac{d^2 r}{dz^2}$$

(производную по длине стержня можно приближённо заменить производной по  $z$ ). В частности,  $x$ - и  $y$ -компоненты этого вектора равны соответственно  $\frac{d^2 X}{dz^2}$  и  $\frac{d^2 Y}{dz^2}$ . Компоненты  $\Omega_\xi, \Omega_\eta$  с той же точностью равны теперь компонентам  $\Omega_x, \Omega_y$ , и из (18,8) получаем:

$$\Omega_\xi = -\frac{d^2 Y}{dz^2}, \quad \Omega_\eta = \frac{d^2 X}{dz^2}. \quad (18,9)$$

Подставляя эти выражения в (18,5), получаем упругую энергию слабо изогнутого стержня в виде

$$F_{ст} = \frac{E}{2} \int \left\{ I_1 \left( \frac{d^2 Y}{dz^2} \right)^2 + I_2 \left( \frac{d^2 X}{dz^2} \right)^2 \right\} dz. \quad (18,10)$$

Напомним, что  $I_1, I_2$  — моменты инерции соответственно относительно осей  $x, y$ , являющихся главными осями инерции.

В частности, для стержня кругового сечения  $I_1 = I_2 \equiv I$  и в подынтегральном выражении получается просто сумма квадратов вторых производных, совпадающая в рассматриваемом приближении с квадратом кривизны стержня:

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{d^2 Y}{dz^2} \approx \frac{1}{R^2}.$$

Ввиду этого формулу (18,10) можно естественным образом обобщить для слабого изгиба стержней (кругового сечения), имеющих в своём естественном (недеформированном) состоянии любую непрямолинейную форму. Для этого надо написать энергию изгиба в виде

$$F_{\text{ст}} = \frac{EI}{2} \int \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 dz, \quad (18,11)$$

где  $R_0$  — радиус естественной кривизны стержня в каждой его точке. Это выражение, как и должно быть, обладает минимумом в недеформированном состоянии ( $R = R_0$ ), а при  $R_0 \rightarrow \infty$  переходит в формулу (18,10).

### § 19. Уравнения равновесия стержней

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений равновесия изогнутых стержней. Рассмотрим опять какой-нибудь из бесконечно малых элементов стержня, вырезанный двумя бесконечно близкими сечениями, и вычислим полную действующую на него силу. Обозначим силу внутренних напряжений, приложенную к площади сечения стержня, посредством  $F^1$ ). Компоненты этого вектора равны интегралам от  $\sigma_{ix}$  по площади сечения:

$$F_i = \int \sigma_{ix} df. \quad (19,1)$$

Если рассматривать два бесконечно близких сечения как поверхности оснований вырезаемого ими элемента стержня, то на верхнее основание действует сила  $F + dF$ , а на нижнее — сила  $-F$ ; их сумма есть дифференциал  $dF$ . Пусть далее  $K$  есть действующая на стержень внешняя сила, отнесённая к единице его длины. Тогда на элемент длины  $dl$  действует внешняя сила  $K dl$ . Равнодействующая всех сил, действующих на этот элемент, есть, следовательно,  $dF + K dl$ . В равновесии эта сила должна обращаться в нуль. Таким образом, получаем:

$$\frac{dF}{dl} = -K. \quad (19,2)$$

Второе уравнение получается из условия равенства нулю полного момента сил, приложенных к данному элементу. Пусть  $M$  есть момент сил внутренних напряжений, действующих на площадь сечения стержня. Этот момент берётся относительно точки (начала координат), лежащей в самой плоскости этого сечения; его компоненты определяются формулами (18,6). Будем вычислять суммарный момент, приложенный к данному элементу стержня, относительно

<sup>1)</sup> Обозначение этой силы посредством  $F$  не может привести к смешению со свободной энергией, которой мы не пользуемся ниже, в §§ 19—21.

точки (назовём её точкой  $O$ ), лежащей в плоскости его верхнего основания. Тогда внутренние напряжения на этом основании дают момент  $M + dM$ . Момент же (относительно  $O$ ) сил внутренних напряжений в нижнем основании элемента складывается из момента  $-M$  этих сил относительно начала координат в плоскости нижнего основания (точка  $O'$ ) и момента (относительно  $O$ ) суммарной силы  $-F$ , действующей на этом основании. Этот второй момент равен  $[(-dl)(-F)]$ , где  $dl$  — вектор элемента длины стержня от  $O'$  к  $O$ . Момент же, обусловленный внешними силами  $K$ , является малой величиной высшего порядка. Таким образом, полный действующий на элемент стержня момент сил есть  $dM + [dlF]$ . В равновесии он должен быть равным нулю:

$$dM + [dlF] = 0.$$

Разделив это равенство на  $dl$  и замечая, что  $\frac{dl}{dl} = t$  есть единичный вектор касательной к стержню (рассматриваемому как линия), получаем уравнение

$$\frac{dM}{dl} = [Ft]. \quad (19,3)$$

Уравнения (19,2) и (19,3) представляют собой полную систему уравнений равновесия произвольным образом изогнутого стержня.

Если действующие на стержень внешние силы являются, как говорят, сосредоточенными, т. е. приложены только к отдельным изолированным его точкам, то на участках стержня между точками приложения сил уравнения равновесия заметно упрощаются. Из (19,2) имеем при  $K = 0$

$$F = \text{const}, \quad (19,4)$$

т. е. силы внутренних напряжений постоянны вдоль длины каждого из указанных участков стержня. Значения этих постоянных определяются тем, что разность  $F_2 - F_1$  значений силы в точках 1 и 2 равна

$$F_2 - F_1 = -\sum K, \quad (19,5)$$

где сумма берётся по всем силам, приложенным к отрезку стержня между точками 1 и 2. Обращаем внимание на то, что в разности  $F_2 - F_1$  точка 2 является более удалённой от начала отсчёта длины стержня (т. е. длины дуги  $l$ ), чем точка 1; это замечание существенно при определении знаков в равенстве (19,5). В частности, если на стержень действует всего одна сосредоточенная сила  $f$ , приложенная к его свободному концу, то  $F$  постоянно вдоль всей длины стержня и равно  $f$ .

Второе уравнение равновесия (19,3) тоже упрощается. Написав в нём  $t = \frac{dl}{dl} = \frac{dr}{dl}$  (где  $r$  — радиус-вектор от некоторой заданной точки к произвольной точке стержня) и интегрируя, получаем ввиду постоянства  $F$ :

$$M = [Fr] + \text{const.} \quad (19,6)$$

Если же отсутствуют также и сосредоточенные силы, а изгиб стержня происходит под действием приложенных к нему сосредоточенных моментов (т. е. сосредоточенных пар сил), то  $F = \text{const}$  вдоль всей длины стержня, а  $M$  испытывает в точках приложения сосредоточенных пар скачки, равные их моментам.

Обратимся, далее, к вопросу о граничных условиях на концах изгибаемого стержня. Здесь могут представиться различные случаи.

Конец стержня называют заделанным (рис. 4, а см. стр. 67), если он не может испытывать никаких смещений — ни продольных, ни поперечных, и, сверх того, не может измениться его направление (т. е. направление касательной к стержню в его конце). В этом случае граничные условия заключаются в том, что задаются координаты конца стержня и единичный вектор касательной  $t$  к нему. Сила же и момент сил реакции, действующие на стержень со стороны опоры в точке закрепления, определяются в результате решения уравнений.

Противоположным является случай свободного конца стержня. В этом случае координаты конца и его направление произвольны. Граничные условия заключаются в том, что сила  $F$  и момент сил  $M$  на конце стержня должны обратиться в нуль<sup>1)</sup>.

Если конец стержня закреплён на шарнире, то он не может испытывать никаких смещений, но его направление не задано. Момент сил, действующих на такой свободно поворачивающийся конец, должен исчезать.

Наконец, если стержень опёрт в некоторой точке опоры (рис. 4, б), то он может скользить по этой точке, но не может испытывать в ней поперечных смещений. В этом случае незадаанными являются направление  $t$  и положение точки, в которой опирается стержень, по его длине. Момент сил в точке опоры должен быть равным нулю соответственно тому, что стержень может свободно поворачиваться, а сила  $F$  в этой точке должна быть перпендикулярна к стержню; продольная компонента силы вызвала бы дальнейшее его скольжение в точке опоры.

Аналогичным образом легко установить граничные условия и при других способах закрепления стержня. Мы не будем останавливаться здесь на этом, ограничившись приведёнными типичными примерами.

<sup>1)</sup> Если к свободному концу приложена сосредоточенная сила  $f$ , то граничное условие гласит не  $F=0$ , а  $F=f$ .

Уже в начале предыдущего параграфа было отмечено, что сильный изгиб стержня произвольного сечения сопровождается, вообще говоря, одновременным его кручением, даже если к стержню не прилагается никаких внешних крутящих моментов. Исключением является изгиб стержня в его главных плоскостях. При таком изгибе кручение не возникает. У стержня кругового сечения никакой изгиб не сопровождается кручением (если, конечно, нет внешних крутящих моментов). В этом можно убедиться следующим образом. Кручение определяется компонентой  $\Omega_z = (\Omega t)$  вектора  $\Omega$ . Вычислим его производную по длине стержня. Для этого пишем, замечая, что  $\Omega_z = \frac{M_z}{C}$ :

$$\frac{d}{dl} (Mt) = C \frac{d\Omega_z}{dl} = \frac{dM}{dl} t + M \frac{dt}{dl}.$$

При подстановке (19,3) первый член обращается в нуль, так что

$$C \frac{d\Omega_z}{dl} = M \frac{dt}{dl}.$$

У стержня кругового сечения  $I_1 = I_2 \equiv I$ ; согласно (18,3) и (18,6) можно поэтому написать  $M$  в виде

$$M = EI \left[ t \frac{dt}{dl} \right] + t C \Omega_z. \quad (19,7)$$

При умножении на  $\frac{dt}{dl}$  оба члена дают нуль, так что

$$\frac{d\Omega_z}{dl} = 0,$$

откуда

$$\Omega_z = \text{const.} \quad (19,8)$$

т. е. угол кручения постоянен вдоль стержня. Если к концам стержня не приложено крутящих моментов, то  $\Omega_z$  на концах равно нулю, а потому кручение отсутствует и по всей длине стержня.

Для стержня кругового сечения можно, таким образом, написать при чистом изгибе

$$M = EI \left[ t \frac{dt}{dl} \right] = EI \left[ \frac{dr}{dl} \frac{d^2 r}{dl^2} \right]. \quad (19,9)$$

Подстановка этого выражения в (19,3) приводит к уравнению чистого изгиба стержней кругового сечения в виде

$$EI \left[ \frac{dr}{dl} \frac{d^2 r}{dl^2} \right] = \left[ F \frac{dr}{dl} \right]. \quad (19,10)$$

#### Задачи

1. Привести к квадратурам задачу об определении формы стержня кругового сечения (упругого прута), сильно изогнутого в одной плоскости приложенными к нему сосредоточенными силами.



Решение. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил; на таком участке  $F = \text{const}$ . Выберем плоскость изгиба в качестве плоскости  $x, y$ , а ось  $y$  — параллельно силе  $F$ . Вводим угол  $\theta$  между касательной к линии стержня и осью  $y$ . Тогда  $\frac{dx}{dl} = \sin \theta$ ,  $\frac{dy}{dl} = \cos \theta$ , где  $x, y$  — координаты точек стержня. Раскрывая векторные произведения в (19,10), получаем уравнение для  $\theta$  как функции длины дуги  $l$ :

$$IE \frac{d^2\theta}{dl^2} - F \sin \theta = 0.$$

Первое интегрирование даёт

$$\frac{IE}{2} \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 + F \cos \theta = c_1$$

и отсюда

$$l = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + c_2. \quad (1)$$

Функция  $\theta(l)$  может быть выражена отсюда через эллиптические функции. Для координат  $x = \int \sin \theta dl$ ,  $y = \int \cos \theta dl$  получаем:

$$x = \pm \frac{1}{F} \sqrt{2IE} \sqrt{c_1 - F \cos \theta} + \text{const},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + \text{const}'. \quad (2)$$

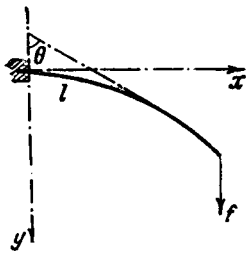


Рис. 15.

2. Определить форму сильно изогнутого стержня, один конец которого заделан, а к другому, свободному, приложена сила  $f$ ; направление  $f$  перпендикулярно к прямой недеформированного стержня (рис. 15).

Решение. На всей длине стержня  $F = \text{const} = f$ . На заделанном конце ( $l=0$ )  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , а на свободном ( $l=L$ , где  $L$  — длина стержня)  $M=0$ , т. е.  $\theta' = 0$ . Вводя обозначение  $\theta_0 = \theta(L)$ , имеем в (1)  $c_1 = f \cos \theta_0$ :

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

Отсюда получаем уравнение, определяющее  $\theta_0$ :

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

Форма стержня определяется формулами:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} (\sqrt{\cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}), \quad y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

3. То же, если сила  $f$ , приложенная к свободному концу, направлена параллельно линии недеформированного стержня.

Решение. Имеем  $F = -f$  (оси координат выбраны указанным на рис. 16 образом). Граничные условия:  $\theta = 0$  при  $l=0$ ,  $\theta' = 0$  при  $l=L$ . Имеем:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

где  $\theta_0 = \theta(L)$  определяется из

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Для  $x$  и  $y$  получаем:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} (\sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

При слабом изгибе  $\theta_0 \ll 1$  и можно написать:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{f}},$$

т. е.  $\theta_0$  выпадает из этого соотношения. Это показывает, в согласии с результатом задачи § 21, что рассматриваемое решение существует только при  $f \geq \frac{\pi^2 IE}{4L^2}$ , т. е. после потери устойчивости прямолинейной формой.

4. То же, если оба конца стержня опёрты, а к его середине приложена сила  $f$ ; расстояние между точками опоры есть  $L_0$ .

Решение. Выбираем оси координат указанным на рис. 17 образом. Сила  $F$  постоянна на каждом из участков  $AB$  и  $BC$ , причём на каждом из них перпендикулярна к линии стержня в точках опоры — соответственно  $A$  и  $C$ . Разность значений  $F$  на  $AB$  и  $BC$  равна  $f$ , откуда заключаем, что на  $AB$   $F \sin \theta_0 = -\frac{f}{2}$ , где  $\theta_0$  — угол между осью  $y$  и линией  $AC$ .

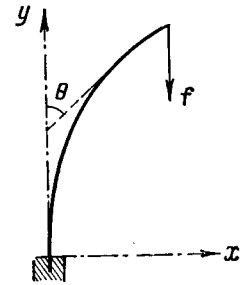


Рис. 16.

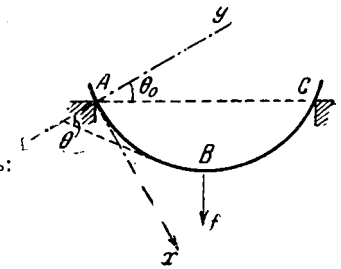


Рис. 17.

В точке  $A (l=0)$  имеем условия  $\theta = \frac{\pi}{2}$  и  $M=0$ , т. е.  $\theta' = 0$ , так что на  $AB$

$$l = \sqrt{\frac{IE}{f}} \sqrt{\sin \theta_0} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}, \quad x = 2 \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \sqrt{\cos \theta},$$

$$y = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta.$$

Угол  $\theta_0$  определяется из условия, что проекция длины  $AB$  на прямую  $AC$  должна быть равна  $\frac{L_0}{2}$ , откуда имеем:

$$\frac{L_0}{2} = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

При некотором определённом значении  $\theta_0$ , лежащем между 0 и  $\frac{\pi}{2}$ , произ-

водная  $\frac{df}{d\theta_0}$  (где  $f$  рассматривается как функция от  $\theta_0$ ) обращается в нуль и делается положительной. Дальнейшему уменьшению  $\theta_0$ , т. е. увеличению прогиба, соответствовало бы уменьшение  $f$ . Это значит, что найденное решение делается неустойчивым; стержень «проваливается» между опорами.

5. Привести к квадратурам задачу о пространственном сильном изгибе стержня под действием сосредоточенных сил.

Решение. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил, на котором  $F = \text{const}$ . Интегрируя (19,10), получаем:

$$EI \left[ \frac{dr}{dl} \frac{d^2 r}{dl^2} \right] = [Fr] - cF; \quad (1)$$

постоянная интегрирования написана в виде вектора  $cF$ , направленного вдоль  $F$ , поскольку надлежащим выбором начала координат, т. е. прибавлением к  $r$  некоторого постоянного вектора, можно исключить аддитивный вектор, перпендикулярный к  $F$ . Умножая (1) скалярно и векторно на  $r'$  (штрих означает дифференцирование по  $l$ ) и замечая, что  $r'r'' = 0$  (поскольку  $r'^2 = 1$ ), получаем:

$$F[r'r'] + cFr' = 0, \quad EI r'' = [[Fr]r'] + c[Fr'].$$

В компонентах (ось  $z$  выбрана по направлению  $F$ ):

$$(xy' - yx') + cz' = 0, \quad EI z'' = -F(xx' + yy').$$

Вводя в этих уравнениях цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ , получаем:

$$r^2 \varphi' + cz' = 0, \quad EI z'' = -Frr'. \quad (2)$$

Из второго уравнения имеем:

$$z' = \frac{f}{2EI} (A - r^2) \quad (3)$$

(где  $A$  — постоянная). Комбинируя (2) и (3) с тождеством

$$r'^2 + r^2 \varphi'^2 + z'^2 = 1,$$

получаем:

$$dl = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - (r^2 + c^2)(A - r^2) \frac{F^2}{4E^2 I^2}}},$$

после чего из (2) и (3) находим:

$$z = \frac{F}{2EI} \int \frac{(A - r^2) r dr}{\sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2 I^2} (r^2 + c^2)(A - r^2)}},$$

$$\varphi = -\frac{cF}{2EI} \int \frac{(A - r^2) dr}{r \sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2 I^2} (r^2 + c^2)(A - r^2)}},$$

чем и определяется форма изогнутого стержня.

6. Стержень кругового сечения подвергнут кручению (угол кручения  $\tau$ ) и изогнут в винтовую линию. Определить силу и момент сил, которые должны быть приложены к концам стержня для того, чтобы удерживать его в таком состоянии.

Решение. Пусть  $R$  — радиус цилиндра, на поверхности которого навита винтовая линия (ось  $z$  выбираем по оси этого цилиндра), а  $\alpha$  — угол между касательной к линии и плоскостью, перпендикулярной к оси  $z$ ; шаг винтовой линии  $h$  связан с  $\alpha$  и  $R$  посредством  $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$ . Уравнение винтовой линии:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = \varphi R \operatorname{tg} \alpha$$

( $\varphi$  — угол поворота вокруг оси  $z$ ); элемент длины дуги  $dl = \frac{R}{\cos \alpha} d\varphi$ . Подставляя эти выражения в (19,7), вычисляем компоненты вектора  $M$ , а затем по формуле (19,3) — силу  $F$  (постоянную вдоль всей длины стержня). В результате находим, что сила  $F$  направлена по оси  $z$  и равна

$$F_z = F = C\tau \frac{\sin \alpha}{R} - \frac{EI}{R^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Момент  $M$  имеет составляющую по оси  $z$ :

$$M_z = C\tau \sin \alpha + \frac{EI}{R} \cos^3 \alpha$$

и составляющую  $M_x$ , направленную в каждой точке стержня по касательной к окружности поперечного сечения цилиндра, равную  $M_x = FR$ .

7. Определить форму гибкой нити (сопротивлением которой на изгиб можно пренебречь по сравнению с сопротивлением на растяжение), подвешенной за две точки в поле тяжести.

Решение. Выбираем плоскость, в которой расположена нить, в качестве плоскости  $x, y$  с осью  $y$ , направленной вертикально вниз. В уравнении (19,3) можно пренебречь членом  $\frac{dM}{dl}$ , поскольку  $M$  пропорционально  $El$ .

Тогда  $[Ft] = 0$ , т. е.  $F$  направлено в каждой точке нити по  $t$  и можно написать  $F = Ft$ . Уравнение (19,2) даёт теперь  $\frac{d}{dl} \left( F \frac{dx}{dl} \right) = 0, \quad \frac{d}{dl} \left( F \frac{dy}{dl} \right) = q$

( $q$  — вес единицы длины нити), откуда  $F \frac{dx}{dl} = c$ ,  $F \frac{dy}{dl} = ql$ . Отсюда имеем  $F = \sqrt{c^2 + q^2 l^2}$ , так что

$$\frac{dx}{dl} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}}, \quad \frac{dy}{dl} = \frac{l}{\sqrt{A^2 + l^2}}$$

(где  $A = \frac{c}{q}$ ). Интегрирование даёт

$$x = A \operatorname{Arsh} \frac{l}{A}, \quad y = \sqrt{A^2 + l^2},$$

откуда

$$y = A \operatorname{ch} \frac{x}{A},$$

т. е. нить имеет форму цепной линии. Выбор начала координат и постоянная  $A$  определяются тем, что кривая должна пройти через две заданные точки и должна иметь заданную длину.

### § 20. Слабый изгиб стержней

Уравнения равновесия значительно упрощаются в практически важном случае слабого изгиба стержней. Изгиб является слабым, если направление касательной  $t$  к стержню медленно меняется вдоль его длины, т. е. производная  $\frac{dt}{dl}$  мала. Другими словами, радиус кривизны изогнутого стержня в каждой точке должен быть велик по сравнению с длиной стержня. Практически это условие сводится к требованию малости поперечного прогиба стержня по сравнению с его длиной. Подчеркнём, что при этом отнюдь не требуется малости прогиба по сравнению с толщиной стержня, как это должно было быть в приближённой теории слабого изгиба пластинок, развитой в §§ 11—12<sup>1)</sup>.

Продифференцируем (19,3) по длине:

$$\frac{d^2 M}{dl^2} = \left[ \frac{dF}{dl} t \right] + \left[ F \frac{dt}{dl} \right]. \quad (20,1)$$

Второй член содержит малую величину  $\frac{dt}{dl}$ , вследствие чего им обычно (за исключением некоторых особых случаев, о которых речь идёт ниже) можно пренебречь. Подставляя в первом члене  $\frac{dF}{dl} = -K$ , получаем уравнение равновесия в виде

$$\frac{d^2 M}{dl^2} = [tK]. \quad (20,2)$$

<sup>1)</sup> Мы не излагаем вовсе сложной теории изгиба стержней, которые в своём естественном, недеформированном, состоянии имеют изогнутую форму (ограничиваясь лишь одним простым примером в задачах 8, 9 этого параграфа).

Напишем это уравнение в компонентах, для чего подставим в него согласно (18,6) и (18,9)

$$M_x = -EI_1 Y'', \quad M_y = EI_2 X'', \quad M_z = 0 \quad (20,3)$$

(знак ' означает везде дифференцирование по  $z$ ). Единичный вектор  $t$  можно считать направленным по оси  $z$ . Тогда мы получим из (20,2)

$$EI_2 X'''' - K_x = 0, \quad EI_1 Y'''' - K_y = 0. \quad (20,4)$$

Эти уравнения определяют зависимость прогибов  $X$  и  $Y$  от  $z$ , т. е. форму слабо изогнутого стержня.

Силу  $F$  внутренних напряжений, действующую на поперечное сечение стержня, также можно выразить через производные от  $X$  и  $Y$ . Подставляя (20,3) в (19,3), получаем:

$$F_x = -EI_2 X''', \quad F_y = -EI_1 Y'''. \quad (20,5)$$

Мы видим, что вторые производные определяют момент сил внутренних напряжений, а третьи производные определяют сами эти силы. Силу (20,5) называют *перерезывающей силой*. Если изгиб производится сосредоточенными силами, то перерезывающая сила постоянна вдоль каждого из отрезков стержня между точками приложения сил, а в каждой из этих точек испытывает скачок, равный приложенной внешней силе.

Величины  $EI_2$  и  $EI_1$  называют жёсткостью стержня на изгиб соответственно в главных плоскостях  $x, z$  и  $y, z$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Уравнением вида

$$DX'''' - K_x = 0 \quad (20,4a)$$

описывается также в определённых предельных случаях и изгиб тонкой пластинки. Пусть прямоугольная пластинка (с длинами сторон  $a$  и  $b$  и толщиной  $h$ ) укрепена вдоль своих сторон  $a$  (направление  $y$ ) и изгибается вдоль сторон  $b$  (ось  $z$ ) однородной вдоль оси  $y$  нагрузкой. В общем случае производных  $a$  и  $b$  для определения изгиба должно быть использовано двухмерное уравнение (12,5) с соответствующими граничными условиями на укрепленных и на свободных сторонах пластинки. В предельном случае  $a \gg b$  деформацию можно считать однородной вдоль оси  $y$ , и тогда двухмерное уравнение равновесия переходит в уравнение вида (20,4a), причём роль жёсткости на изгиб играет величина

$$D = \frac{Eh^3 a}{12(1 - \sigma^2)}.$$

Уравнение (20,4a) применимо и в обратном предельном случае  $a \ll b$ , когда пластинку можно рассматривать как стержень длины  $b$  с узким прямоугольным сечением (сечение в виде прямоугольника со сторонами  $a$  и  $h$ ); при этом, однако, жёсткость на изгиб определяется другим выражением:

$$D = EI_2 = \frac{Eh^3 a}{12}.$$

Если приложенные к стержню внешние силы действуют в одной плоскости, то и изгиб стержня произойдет в одной плоскости. Эти две плоскости, однако, в общем случае не совпадают друг с другом; легко найти угол между ними. Если  $\alpha$  — угол между плоскостью действия сил и первой главной плоскостью изгиба (плоскостью  $x, z$ ), то уравнения равновесия принимают вид

$$X''' = \frac{\cos \alpha}{I_2 E} K, \quad Y''' = \frac{\sin \alpha}{I_1 E} K.$$

Оба уравнения отличаются только коэффициентом при  $K$ . Поэтому  $X$  и  $Y$  пропорциональны друг другу, причём

$$Y = X \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha.$$

Угол  $\theta$  между плоскостью изгиба и плоскостью  $x, z$  определяется равенством

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha. \quad (20,6)$$

Для стержня кругового сечения  $I_1 = I_2$  и  $\alpha = \theta$ , т. е. изгиб происходит в плоскости действия сил. То же самое имеет место и для стержня произвольного сечения при  $\alpha = 0$ , т. е. когда силы направлены в главной плоскости. Для абсолютной величины прогиба

$$\zeta = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

имеет место уравнение

$$EI \zeta'''' = K, \quad I = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 \cos^2 \alpha + I_2^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (20,7)$$

Перерезывающая сила  $F$  лежит в той же плоскости, что и  $K$ , и равна

$$F = -EI \zeta'''. \quad (20,8)$$

Величина  $I$  играет роль «эффективного» значения момента инерции сечения стержня.

Напишем в явном виде граничные условия для уравнений равновесия слабо изогнутого стержня. Если конец стержня заделан, то на нём должно быть  $X = Y = 0$  и, сверх того, не может измениться его направление, т. е. должно быть  $X' = Y' = 0$ . Таким образом, на заделанном конце стержня должны выполняться условия:

$$X = Y = 0, \quad X' = Y' = 0. \quad (20,9)$$

Сила же и момент сил реакции в точках опоры определяются по известному решению формулами (20,3) и (20,5).

При достаточно слабом изгибе стержня закрепление его конца в шарнире и опирание его в точке эквивалентны в отношении гра-

ничных условий. Дело в том, что во втором случае продольное смещение стержня в точке опоры является при слабом изгибе величиной второго порядка малости по сравнению с поперечным прогибом и потому должно считаться равным нулю. Граничные условия исчезновения поперечного смещения и момента сил дают в этих случаях

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \quad (20,10)$$

Направление же конца стержня и сила реакции в точке опоры определяются в результате решения уравнений.

Наконец, на свободном конце должны отсутствовать сила  $F$  и момент сил  $M$ . Согласно (20,3) и (20,5) это приводит к условиям

$$X'' = Y'' = 0, \quad X''' = Y''' = 0 \quad (20,11)$$

(если к свободному концу приложена сосредоточенная сила, то  $F$  должно быть равно этой силе, а не нулю).

Нетрудно обобщить уравнения (20,4) на случай стержней переменного сечения. У таких стержней моменты инерции  $I_1$  и  $I_2$  являются функциями  $z$ . Формулы (20,3), определяющие моменты сил в каждом данном сечении стержня, по-прежнему остаются справедливыми. Подстановка их в (20,2) приводит теперь к уравнениям

$$E \frac{d^2}{dz^2} \left( I_1 \frac{d^2 Y}{dz^2} \right) = K_y, \quad E \frac{d^2}{dz^2} \left( I_2 \frac{d^2 X}{dz^2} \right) = K_x, \quad (20,12)$$

в которых  $I_1$  и  $I_2$  нельзя вынести из-под знака производной. Для перерезывающей силы имеем:

$$F_x = -E \frac{d}{dz} \left( I_2 \frac{d^2 X}{dz^2} \right), \quad F_y = -E \frac{d}{dz} \left( I_1 \frac{d^2 Y}{dz^2} \right). \quad (20,13)$$

Вернёмся снова к уравнениям (20,1). Произведённое нами пренебрежение вторым членом в правой стороне равенства может оказаться в некоторых случаях незаконным даже при слабом изгибе. Это — те случаи, в которых вдоль длины стержня действует большая сила внутренних напряжений, т. е.  $F_z$  очень велико. Наличие такой силы вызывается обычно сильным натяжением стержня приложенными к его концам внешними растягивающими силами. Обозначим действующее вдоль стержня постоянное натяжение посредством  $F_z = T$ . Если стержень подвергается сильному сжатию, а не растяжению, то сила  $T$  отрицательна. Раскрывая векторное произведение  $\left[ F \frac{dt}{dt} \right]$ , мы должны теперь сохранить члены, содержащие  $T$ , членами же с  $F_x$  и  $F_y$  можно по-прежнему пренебречь. Подставляя для компонент вектора  $\frac{dt}{dt}$  соответственно  $X''$ ,  $Y''$ , 1, получим

уравнения равновесия в виде

$$\begin{aligned} I_2 E X'''' - T X'' - K_x &= 0, \\ I_1 E Y'''' - T Y'' - K_y &= 0. \end{aligned} \quad (20,14)$$

К выражениям (20,5) для перерезывающей силы надо прибавить теперь члены, равные проекциям действующей вдоль вектора  $t$  силы  $T$  на оси  $x$  и  $y$ :

$$F_x = -E I_2 X'''' + T X', \quad F_y = -E I_1 Y'''' + T Y'. \quad (20,15)$$

Эти формулы могут быть, конечно, получены и непосредственно из (19,3).

Большая сила  $T$  может в некоторых случаях появиться и в результате самого изгиба, даже если нет никаких специально приложенных растягивающих сил. Рассмотрим стержень, оба конца которого заделаны или закреплены на шарнирах в неподвижных опорах, так что не могут испытывать продольного смещения. Тогда прогиб стержня неизбежно сопровождается его удлинением, что и приводит к появлению в нём силы  $T$ . Легко оценить величину прогиба, при котором эта сила делается существенной. Длина  $L + \Delta L$  изогнутого стержня равна интегралу

$$L + \Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + X'^2 + Y'^2} dz,$$

взятому по прямой, соединяющей точки опоры. При слабом изгибе можно разложить корень в ряд, и мы получаем для удлинения  $\Delta L$  выражение

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz.$$

Возникающая при простом растяжении сила натяжения равна отношению удлинению, умноженному на модуль Юнга и на площадь  $S$  сечения стержня. Таким образом, сила  $T$  равна

$$T = \frac{ES}{2L} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz. \quad (20,16)$$

Если  $\delta$  есть порядок величины поперечного прогиба, то производные  $X'$  и  $Y'$  — порядка  $\frac{\delta}{L}$ , так что весь интеграл, стоящий в (20,16), — порядка величины  $\frac{\delta^2}{L^2} L = \frac{\delta^2}{L}$  и  $T \sim ES \left(\frac{\delta}{L}\right)^2$ . Порядок величины первых и вторых членов в (20,14) — соответственно  $IE \frac{\delta}{L^4}$

и  $T \frac{\delta}{L^2} \sim ES \frac{\delta^3}{L^4}$ . Момент инерции  $I$  имеет порядок величины  $I \sim h^4$ , а  $S \sim h^2$ , где  $h$  — толщина стержня. Подставляя это, легко получаем, что первые и вторые члены в (20,14) сравниваются по порядку величины при

$$\delta \sim h.$$

Таким образом, при изгибе стержней, концы которых закреплены, можно пользоваться уравнениями равновесия в виде (20,4), только если прогиб мал по сравнению с толщиной стержня. Если же  $\delta$  не мало по сравнению с  $h$  (но, конечно, по-прежнему  $\delta \ll L$ ), то надо пользоваться уравнениями (20,14). При этом сила  $T$  в этих уравнениях заранее не известна. При их решении надо сначала рассматривать  $T$  как заданный параметр, а затем по полученному решению определить  $T$  согласно формуле (20,16), чем и определится связь  $T$  с приложенными к стержню изгибающими силами.

Обратным предельным случаем является тот, когда сопротивление стержня на изгиб мало по сравнению с его сопротивлением на растяжение, так что в уравнениях (20,14) можно пренебречь первыми членами по сравнению со вторыми. Физически такой случай может быть осуществлён либо очень сильным растяжением  $T$ , либо при достаточно малом  $EI$ , что может быть связано с малой толщиной  $h$  (о сильно натянутых стержнях говорят как о *струнах*). Уравнения равновесия гласят в этих случаях:

$$T X'' + K_x = 0, \quad T Y'' + K_y = 0. \quad (20,17)$$

Концы струны надо представлять себе закреплёнными в том смысле, что их координаты заданы, т. е.

$$X = Y = 0. \quad (20,18)$$

Направление же концов не может быть задано произвольным образом, а определяется решением уравнений.

В заключение покажем, каким образом уравнения равновесия слабо изогнутого стержня можно получить, исходя из вариационного принципа, используя выражение (18,10) для упругой энергии:

$$F_{\text{ст}} = \frac{E}{2} \int \{I_1 Y'^2 + I_2 X'^2\} dz.$$

В равновесии должна быть минимальна сумма этой энергии и потенциальной энергии, связанной с действующими на стержень внешними силами  $K$ , т. е. должно быть

$$\delta F_{\text{ст}} - \int (K_x \delta X + K_y \delta Y) dz = 0$$

(второй член представляет собой работу внешних сил при бесконечно малом смещении линии стержня). При варьировании  $F_{\text{ст}}$

производим дважды интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \int X''^2 dz &= \int X'' \delta X'' dz = X'' \delta X' \Big| - \int X''' \delta X' dz = \\ &= X'' \delta X' \Big| - X''' \delta X \Big| + \int X'''' \delta X dz \end{aligned}$$

и аналогичным образом для интеграла от  $Y''^2$ . Собирая различные члены, получим:

$$\begin{aligned} \int [(EI_1 Y'''' - K_y) \delta Y + (EI_2 X'''' - K_x) \delta X] dz + \\ + EI_1 (Y'' \delta Y' - Y''' \delta Y) \Big| + EI_2 (X'' \delta X' - X''' \delta X) \Big| = 0. \end{aligned}$$

Из первого, интегрального, члена следуют ввиду произвольности вариаций  $\delta X$  и  $\delta Y$  уравнения равновесия (20,4). Остальные же, проинтегрированные, члены дают граничные условия к этим уравнениям; так, на свободном конце вариации  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta X'$ ,  $\delta Y'$  произвольны и соответственно получаются условия (20,11). В то же время коэффициенты при  $\delta X$  и  $\delta Y$  в этих членах дают выражения (20,5) для компонент перерезывающей силы, а коэффициенты при  $\delta X'$  и  $\delta Y'$  — выражения (20,3) для компонент изгибающего момента.

Наконец, уравнения равновесия (20,14) при наличии растягивающей силы  $T$  можно получить тем же способом, прибавив к варьруемой энергии величину

$$T \Delta L = \frac{T}{2} \int (X'^2 + Y'^2) dz,$$

представляющую собой работу силы  $T$  на пути  $\Delta L$  — удлинении стержня.

### Задачи

1. Определить форму прогиба стержня (длины  $l$ ) под влиянием собственного веса при различных способах закрепления его концов.

Решение. Искомая форма определяется решением уравнения

$$\zeta'''' = \frac{q}{EI}$$

( $q$  — вес единицы длины стержня) с теми или другими граничными условиями на его концах, сформулированными в тексте. При различных способах закрепления концов стержня получаются следующие формы прогиба и максимальные смещения (так называемые стрелки прогиба); начало координат везде выбрано в одном из концов стержня.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z-l)^2, \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{EI}.$$

б) Оба конца опёрты:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z (z^3 - 2lz^2 + l^3), \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}.$$

в) Один конец ( $z=l$ ) заделан, а другой ( $z=0$ ) опёрт:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z (2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta(0, 42l) = 0, 0054 \frac{q l^4}{EI}.$$

г) Один конец ( $z=0$ ) заделан, а другой ( $z=l$ ) свободен:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta(l) = \frac{1}{8} \frac{q l^4}{EI}.$$

2. Определить форму прогиба стержня под влиянием приложенной к его середине сосредоточенной силы  $f$ .

Решение. Везде кроме точки  $z=l/2$  имеем уравнение  $\zeta'''' = 0$ . Граничные условия в концах стержня ( $z=0$  и  $z=l$ ) определяются способом закрепления; в точке же  $z=l/2$  должны быть непрерывны  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ , а разность перерезывающих сил  $F = -EI \zeta''''$  по обе стороны этой точки должна быть равна силе  $f$ .

Форма стержня (на участке  $0 \leq z \leq l/2$ ) и стрелка прогиба даются следующими формулами.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z^2 (3l - 4z), \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{f l^3}{192EI}.$$

б) Оба конца стержня опёрты:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z (3l^2 - 4z^2), \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{f l^3}{48EI}.$$

Форма стержня симметрична относительно его середины, так что функция  $\zeta(z)$  на участке  $l/2 \leq z \leq l$  получается отсюда просто заменой  $z$  на  $l-z$ .

3. То же для стержня, один из концов которого ( $z=0$ ) заделан, а другой ( $z=l$ ) свободен, причём к последнему приложена сосредоточенная сила  $f$ .

Решение. Вдоль всего стержня  $F = \text{const} = f$ , так что  $\zeta'''' = -f/EI$ . С условиями  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  при  $z=0$  и  $\zeta'' = 0$  при  $z=l$  получаем:

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2 (3l - z), \quad \zeta(l) = \frac{f l^3}{3EI}.$$

4. Определить форму прогиба стержня с закреплёнными концами под влиянием сосредоточенной пары сил, приложенной к его середине.

Решение. Вдоль всей длины стержня  $\zeta'''' = 0$ , а в точке  $z=l/2$  момент  $M = EI \zeta''$  испытывает скачок, равный моменту  $m$  приложенной сосредоточенной пары. С соответствующими условиями на концах получим:

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{m}{24EI l} z^2 (l + 2z) \text{ при } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EI l} (l-z)^2 [l + 2(l-z)] \text{ при } l/2 \leq z \leq l.$$

б) Оба конца закреплены в шарнирах:

$$\zeta = \frac{m}{24EI} z (l^2 - 4z^2) \text{ при } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EI} (l-z) [l^2 - 4(l-z)^2] \text{ при } l/2 \leq z \leq l.$$

По обе стороны от точки  $z = l/2$  стержень изогнут в разные стороны.

5. То же, если сосредоточенная пара приложена к свободному концу стержня, другой конец которого заделан.

Решение. Вдоль всей длины стержня имеем  $M = EI\zeta'' = m$ , а в точке  $z = 0$ :  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$ . Форма изгиба дается формулой

$$\zeta = \frac{m}{2EI} z^2.$$

6. Определить форму стержня (кругового сечения) с закреплёнными в шарнирах концами, растягиваемого силой  $T$  и изгибаемого силой  $f$ , приложенной к его середине.

Решение. На отрезке  $0 \leq z \leq l/2$  перерезывающая сила равна  $f/2$ , так что (20,15) даёт уравнение

$$\zeta''' - \frac{T}{EI} \zeta' = -\frac{f}{2EI}.$$

Граничные условия:  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  при  $z = 0, l$ , а при  $z = l/2$  должно быть  $\zeta' = 0$  (в силу непрерывности  $\zeta'$ ). Для формы стержня (на отрезке  $0 \leq z \leq l/2$ ) получим формулу

$$\zeta = \frac{f}{2T} \left( z - \frac{\text{sh } kz}{k \text{ch } \frac{kz}{2}} \right), \quad k = \sqrt{\frac{T}{EI}}.$$

При малых  $k$  это выражение переходит в формулу, полученную в задаче 2, б. При больших же значениях  $k$  оно переходит в

$$\zeta = \frac{f}{2T} \frac{z}{l},$$

т. е., в согласии с уравнением (20,17), гибкая нить принимает под влиянием силы  $f$  форму, составленную из двух прямых отрезков, пересекающихся в точке  $z = l/2$ .

Если сила  $T$  сама возникает в результате растяжения стержня поперечной силой, то для её определения надо воспользоваться формулой (20,16). Подставив в неё полученное выражение, найдём уравнение

$$\frac{1}{k^6} \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{th}^2 \frac{kl}{2} - \frac{3}{kl} \text{th} \frac{kl}{2} \right] = \frac{8E^2 l^3}{f^2 S},$$

определяющее в неявном виде  $T$  как функцию от  $f$ .

7. Стержень (кругового сечения) бесконечной длины лежит на упругом основании, т. е. при изгибе на него действует сила  $K = -\alpha\zeta$ , пропорциональная прогибу. Определить форму, принимаемую стержнем при действии на него сосредоточенной силы  $f$ .

Решение. Выбираем начало координат в точке приложения силы  $f$ . Везде кроме точки  $z = 0$  имеет место уравнение

$$EI\zeta'''' = -\alpha\zeta.$$

Решение должно удовлетворять условиям  $\zeta = 0$  при  $z = \pm \infty$ , а при  $z = 0$  должны быть непрерывны  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ ; разность же значений перерезывающей силы  $F = -EI\zeta''''$  при  $z \rightarrow +0$  и  $z \rightarrow -0$  должна быть равна  $f$ . Такое решение есть

$$\zeta = \frac{f}{8\beta^3 EI} e^{-\beta|z|} [\cos \beta|z| + \sin \beta|z|], \quad \beta = \left( \frac{\alpha}{4EI} \right)^{1/4}.$$

8. Вывести уравнение равновесия для слабого изгиба тонкого стержня (кругового сечения), имеющего в своём естественном состоянии форму дуги окружности и изгибаемого в своей плоскости приложенными к нему радиальными силами.

Решение. Выбирая начало полярных координат  $r, \varphi$  в центре окружности, напомним уравнение деформированной линии стержня в виде  $r = a + \zeta(\varphi)$ , где  $a$  — радиус дуги, а  $\zeta$  — малые радиальные смещения при изгибе. Воспользовавшись известным выражением для радиуса кривизны в полярных координатах, найдём с точностью до членов первого порядка по  $\zeta$

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\zeta + \zeta''}{a^2}$$

( $'$  означает дифференцирование по  $\varphi$ ). Согласно (18,11) находим упругую энергию изгиба:

$$F_{CT} = \frac{EI}{2} \int_0^{\varphi_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)^2 a d\varphi = \frac{EI}{2a^3} \int_0^{\varphi_0} (\zeta + \zeta'')^2 d\varphi$$

( $\varphi_0$  — центральный угол дуги). Уравнение равновесия получается из вариационного принципа

$$\delta F_{CT} - \int_0^{\varphi_0} \delta \zeta K_r a d\varphi = 0$$

( $K_r$  — отнесённая к единице длины внешняя радиальная сила) с дополнительным условием

$$\int_0^{\varphi_0} \zeta d\varphi = 0,$$

выражающим собой в рассматриваемом приближении условие неизменности общей длины периметра стержня, т. е. условие отсутствия общего его растяжения. Следуя методу Лагранжа, приравняем нулю сумму

$$\delta F_{CT} - \int_0^{\varphi_0} a K_r \delta \zeta d\varphi + \alpha a \int_0^{\varphi_0} \delta \zeta d\varphi = 0,$$

где  $\alpha$  — постоянная. Производя варьирование в подынтегральном выражении в  $F_{CT}$  и интегрируя член с  $\delta \zeta''$  дважды по частям, получим:

$$\int \left[ \frac{EI}{a^3} (\zeta + 2\zeta'' + \zeta''''') - aK_r + \alpha a \right] \delta \zeta d\varphi + \frac{EI}{a^2} (\zeta + \zeta'') \delta \zeta' - \frac{EI}{a^2} (\zeta' + \zeta''') \delta \zeta = 0,$$

Отсюда находим уравнение равновесия<sup>1)</sup>

$$\frac{EI}{a^3} (\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta) - K_r + \alpha = 0, \quad (1)$$

выражение для перерезывающей силы

$$F = -\frac{EI}{a^2} (\zeta' + \zeta''')$$

и выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{EI}{a^2} (\zeta + \zeta'')$$

(ср. конец § 20). Постоянная  $\alpha$  определяется условием отсутствия общего растяжения стержня.

9. Определить деформацию кругового кольца, изгибаемого двумя сосредоточенными силами  $f$ , действующими вдоль диаметра (рис. 18).

Решение. Интегрируя уравнение (1) по всей длине кольца, найдём, что

$$2\pi\alpha a = \int K_r a d\varphi = 2f.$$

Везде кроме точек  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$  имеем уравнение (1) с  $K_r=0$ :

$$\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta + \frac{fa^3}{\pi EI} = 0.$$

Искомая деформация кольца симметрична относительно диаметров  $AB$  и  $CD$ , в силу чего в точках  $A, B, C, D$  должно быть  $\zeta'=0$ . Разность значений

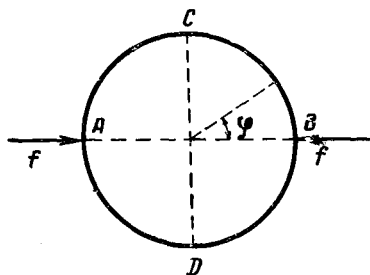


Рис. 18.

перерезывающей силы при  $\varphi \pm 0$  должна быть равна  $f$ . Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения равновесия есть

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \varphi \cos \varphi - \frac{\pi}{8} \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

В частности, точки  $A$  и  $B$  взаимно сближаются на величину

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

## § 21. Устойчивость упругих систем

Поведение стержня, подверженного воздействию продольных сжимающих сил, представляет простейший пример важного явления *упругой неустойчивости*, впервые обнаруженного Л. Эйлером.

<sup>1)</sup> При отсутствии внешних сил  $K_r=0$  и  $\alpha=0$ ; отличные от нуля решения получающегося однородного уравнения соответствуют простому переносу или повороту стержня как целого.

При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил  $K_x, K_y$ , уравнения равновесия сжатого стержня (20,14) имеют очевидное решение  $X=Y=0$ , соответствующее стержню, остающемуся при воздействии продольной силы  $|T|$  прямолинейным. Это решение, однако, соответствует устойчивому равновесию стержня лишь до тех пор, пока сжимающая сила  $|T|$  остаётся меньше некоторого критического значения  $T_{кр}$ . При  $|T| < T_{кр}$  прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к произвольному малому возмущению. Другими словами, если под влиянием какого-либо малого воздействия стержень подвергается слабому изгибу, то по прекращении этого воздействия стержень будет стремиться вернуться в исходное состояние.

Напротив, при  $|T| > T_{кр}$  прямолинейная форма отвечает неустойчивому равновесию. Достаточно уже бесконечно малого воздействия (изгиба) для того, чтобы равновесие нарушилось, в результате чего произойдёт сильный изгиб стержня. Ясно, что в этих условиях сжатый стержень вообще не сможет реально существовать в неизогнутом виде.

Поведение стержня после потери им устойчивости должно описываться уравнениями сильного изгиба. Однако самое значение критической нагрузки  $T_{кр}$  может быть получено с помощью уравнений слабого изгиба. При  $|T| = T_{кр}$  прямолинейная форма стержня соответствует некоторому безразличному равновесию. Это значит, что наряду с решением  $X=Y=0$  должны существовать ещё и состояния слабого изгиба, которые тоже являются равновесными. Поэтому критическое значение  $T_{кр}$  можно определить как то значение  $|T|$ , при котором у уравнений

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0, \quad EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0 \quad (21,1)$$

появляется отличное от нуля решение. Само же это решение определяет характер деформации, которой подвергнется стержень непосредственно после потери им устойчивости.

В задачах этого параграфа приведён ряд типичных случаев потери устойчивости различными упругими системами.

### Задачи

1. Определить критическую сжимающую силу для стержня с шарнирно закреплёнными концами.

Решение. Поскольку нас интересует наименьшее значение  $|T|$ , при котором появляется отличное от нуля решение уравнений (21,1), то достаточно рассмотреть лишь то из этих двух уравнений, которое содержит меньшее из  $I_1, I_2$ ; пусть  $I_2 < I_1$ . Ищем решение уравнения  $EI_2 X'''' + |T| X'' = 0$  в виде

$$X = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz,$$

где  $k = \sqrt{|T|/EI_2}$ . Отличное от нуля решение, удовлетворяющее условиям  $X=0, X''=0$  при  $z=0$  и  $z=l$ , есть

$$X = C \sin kz,$$



причём должно быть  $\sin kl = 0$ . Отсюда находим искомую критическую силу

$$T_{кр} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2}.$$

После потери устойчивости стержень примет форму изображённого на рис. 19, а вида.

2. То же для стержня с заделанными концами (рис. 19, б).

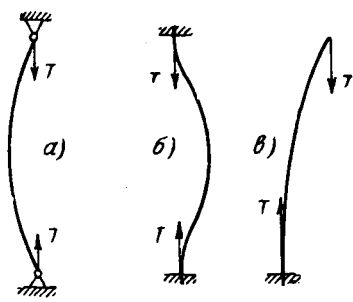


Рис. 19.

Решение.  $T_{кр} = \frac{4\pi^2 EI_2}{l^2}$ .

3. То же для стержня, один из концов которого заделан, а другой свободен (рис. 19, в).

Решение.  $T_{кр} = \frac{\pi^2 EI_2}{4l^2}$ .

4. Определить критическую сжимающую силу для стержня (кругового сечения) с шарнирно закреплёнными концами, лежащего на упругом основании (см. задачу 7 § 20).

Решение. Вместо уравнений (21,1) здесь надо рассмотреть уравнение

$$EIX'''' + |T|X'' + \alpha X = 0.$$

Аналогичное исследование приводит к решению

$$X = A \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad T_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left( n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right),$$

причём для  $n$  должно быть взято то из целых значений, для которого получается наименьшее значение  $T_{кр}$ . При достаточно больших значениях  $\alpha$  получается  $n > 1$ , т. е. после потери устойчивости стержень принимает форму с несколькими «пучностями».

5. Стержень кругового сечения подвергнут кручению, и его концы заделаны. Определить критическую величину кручения, после которой прямолинейная форма стержня делается неустойчивой.

Решение. Критическое значение угла кручения определяется появлением отличных от нуля решений уравнений слабого изгиба закрученного стержня. Для вывода этих уравнений подставляем выражение (19,7):

$$M = EI \left[ t \frac{dt}{dl} \right] + C\tau$$

( $\tau$  — постоянный угол кручения) в уравнение (19,3); это даёт

$$EI \left[ t \frac{d^2 t}{dl^2} \right] + C\tau \frac{dt}{dl} - [Ft] = 0.$$

Дифференцируем это уравнение; поскольку изгиб слабый, то при дифференцировании первого и третьего членов можно считать  $t$  постоянным, равным вектору  $t_0$ , направленному по оси стержня (оси  $z$ ). Помня также, что  $\frac{dF}{dl} = 0$  (внешние силы по длине стержня отсутствуют), получаем:

$$EI \left[ t_0 \frac{d^2 t}{dl^2} \right] + C\tau \frac{d^2 t}{dl^2} = 0,$$

или в компонентах:

$$Y'''' - \kappa X'''' = 0,$$

$$X'''' + \kappa Y'''' = 0,$$

где  $\kappa = \frac{C\tau}{EI}$ . Вводя в качестве неизвестной функцию  $\xi = X + iY$ , получаем уравнение  $\xi'''' - i\kappa \xi'''' = 0$ . Ищем решение, удовлетворяющее условиям  $\xi = 0$ ,  $\xi' = 0$  при  $z = 0$ ,  $z = l$ , в виде  $\xi = a(1 + i\kappa z - e^{i\kappa z}) + bz^2$  и получаем в качестве условия совместности получающихся для  $a$  и  $b$  уравнений соотношение  $e^{i\kappa l} = \frac{2 + i\kappa l}{2 - i\kappa l}$ , откуда  $\frac{\kappa l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2}$ . Наименьший корень этого уравнения есть

$\frac{\kappa l}{2} = 4,49$ , так что

$$\tau_{кр} = \frac{8,98 EI}{Cl}.$$

6. То же для стержня с шарнирно закреплёнными концами.

Решение. Здесь получается  $\xi = a \left( 1 - e^{i\kappa z} - \frac{\kappa^2}{2} z^2 \right) + bz$ , причём  $\kappa$  определяется из  $e^{i\kappa l} = 1$ , т. е.  $\kappa l = 2\pi$ . Поэтому искомый критический угол кручения:

$$\tau_{кр} = \frac{2\pi EI}{Cl}.$$

7. Определить предел устойчивости вертикального стержня, находящегося под действием собственного веса; нижний конец стержня заделан.

Решение. Если продольное натяжение  $F_z \equiv T$  меняется вдоль длины стержня, то в первом члене в (20,1)  $\frac{dF_z}{dl} \neq 0$  и вместо уравнений (20,14) получается:

$$I_2 EX'''' - (TX')' - K_x = 0,$$

$$I_1 EY'''' - (TY')' - K_y = 0.$$

В данном случае поперечные изгибающие силы отсутствуют по всей длине стержня, а  $T = -q(l-z)$ , где  $q$  — вес единицы длины стержня, а  $z$  отсчитывается от его нижнего конца. Предполагая, что  $I_2 < I_1$ , рассматриваем уравнение

$$I_2 EX'''' = TX' = -q(l-z)X'$$

(при  $z = l$  автоматически имеем  $X'''' = 0$ ). Общий интеграл этого уравнения для функции  $u = X'$  есть

$$u = \eta^{1/3} [aJ_{-1/3}(\eta) + bJ_{1/3}(\eta)],$$

где

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EI_2} (l-z)^3}.$$

Граничные условия  $X' = 0$  при  $z = 0$  и  $X'' = 0$  при  $z = l$  дают для функции  $u(\eta)$  условия:

$$u = 0 \text{ при } \eta = \eta_0 \equiv \frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI_2}}, \quad u'\eta^{1/3} = 0 \text{ при } \eta = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, надо положить  $b=0$ , причём  $J_{-1/2}(x_0)=0$ . Наименьший корень этого уравнения  $\eta_0=1,87$ , откуда находим критическую длину стержня

$$l_{кр} = 1,98 \left( \frac{EI_2}{q} \right)^{1/3}.$$

8. Стержень обладает вытянутой формой поперечного сечения, так что  $I_2 \gg I_1$ . Один конец стержня заделан, а к свободному концу приложена сила  $f$ , изгибающая его в главной плоскости  $x, z$  (в которой жёсткость на изгиб есть  $EI_2$ ). Определить критическое значение  $f_{кр}$ , после которого плоская форма изгиба становится неустойчивой и стержень отгибается в боковую сторону (в плоскости  $y, z$ ), одновременно испытывая кручение.

Решение. Ввиду большой величины жёсткости  $EI_2$  по сравнению с  $EI_1$  (и с жёсткостью на кручение  $C$ )<sup>1)</sup> неустойчивость по отношению к сильному боковому изгибу возникает в то время, когда изгиб в плоскости  $x, z$  остаётся ещё слабым. Для определения момента наступления неустойчивости надо составить уравнения слабого бокового изгиба стержня, сохраняя в них члены, пропорциональные произведениям действующей в плоскости  $x, z$  силы  $f$  на малые смещения. Поскольку сосредоточенная сила приложена лишь к свободному концу стержня, то вдоль всей его длины  $\mathbf{F} = \mathbf{f}$ , а на свободном конце ( $z=l$ ) момент  $\mathbf{M} = 0$ ; по формуле (19,6) находим компоненты момента относительно закреплённой системы координат  $x, y, z$ :

$$M_x = 0, \quad M_y = (l-z)f, \quad M_z = (Y - Y_0)f,$$

где  $Y_0 = Y(l)$ . Проектируем эти моменты на связанные в каждой точке со стержнем оси координат  $\xi, \eta, \zeta$ ; с точностью до членов первого порядка по смещениям получим:

$$M_\xi = \varphi(l-z)f, \quad M_\eta = (l-z)f,$$

$$M_\zeta = (l-z)f \frac{dY}{dz} + f(Y - Y_0),$$

где  $\varphi$  — полный угол поворота сечения стержня при его закручивании (угол кручения  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$  здесь не постоянен вдоль длины стержня). С другой стороны, согласно (18,6) и (18,9) имеем при слабом изгибе

$$M_\xi = -EI_1 Y'', \quad M_\eta = EI_2 X'', \quad M_\zeta = C\varphi'$$

и, сравнивая эти выражения, получим уравнения равновесия:

$$EI_2 X'' = (l-z)f,$$

$$EI_1 Y'' = -\varphi(l-z)f, \quad C\varphi' = (l-z)fY' + (Y - Y_0)f.$$

<sup>1)</sup> Так, для узкого прямоугольного сечения с шириной  $h$  и высотой  $b \gg h$  имеем:

$$EI_1 = \frac{bh^3}{12} E, \quad EI_2 = \frac{b^3h}{12} E, \quad C = \frac{bh^3}{3} \mu.$$

Первое из этих уравнений определяет основной изгиб стержня в плоскости  $x, z$ ; требуется найти значение  $f$ , при котором появляется отличное от нуля решение у второго и третьего уравнений. Исключая из них  $Y$ , найдём:

$$\varphi'' + k^2(l-z)^2 \varphi = 0, \quad k^2 = \frac{f^2}{EI_1 C}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\varphi = a \sqrt{l-z} J_{1/4} \left( \frac{k}{2} (l-z)^2 \right) + b \sqrt{l-z} J_{-1/4} \left( \frac{k}{2} (l-z)^2 \right).$$

На заделанном конце ( $z=0$ ) должно быть  $\varphi=0$ , а на свободном крутящий момент  $C\varphi'=0$ . Из второго условия имеем  $a=0$ , а первое даёт  $J_{-1/4} \left( \frac{kl^2}{2} \right) = 0$ .

Наименьший корень этого уравнения есть  $\frac{kl^2}{2} = 2,006$ , откуда

$$f_{кр} = \frac{4,01 \sqrt{EI_1 C}}{l^2}.$$

## ГЛАВА III УПРУГИЕ ВОЛНЫ

### § 22. Упругие волны в изотропной среде

Если в деформируемом теле происходит движение, то температура тела, вообще говоря, отнюдь не постоянна, а меняется как со временем, так и от точки к точке вдоль тела. Это обстоятельство сильно усложняет точные уравнения движения в общем случае произвольных движений.

Обычно, однако, положение упрощается благодаря тому, что передача тепла из одного участка тела в другой (посредством простой теплопроводности) происходит очень медленно. Если теплообмен практически не происходит в течение промежутков времени порядка периода колебательных движений в теле, то можно рассматривать каждый участок тела как теплоизолированный, т. е. движение будет адиабатическим. Но при адиабатических деформациях  $\sigma_{ik}$  выражается через  $u_{ik}$  по формулам обычного вида с той лишь разницей, что вместо обычных («изотермических») значений величин  $E$ ,  $\sigma$  надо брать их адиабатические значения (см. § 6). Ниже мы будем считать это условие выполненным и соответственно этому под  $E$  и  $\sigma$  в этой главе будут подразумеваться их адиабатические значения.

Для того чтобы получить уравнения движения упругой среды, надо приравнять силу внутренних напряжений  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  произведению ускорения  $\ddot{u}_i$  на массу единицы объема тела, т. е. на его плотность  $\rho$ :

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (22,1)$$

Это есть общий вид уравнений движения.

В частности, уравнения движения изотропной упругой среды можно написать непосредственно по аналогии с уравнением равновесия (7,2). Имеем:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \text{grad div } \mathbf{u}. \quad (22,2)$$

Поскольку все деформации предполагаются малыми, то рассматриваемые в теории упругости движения представляют собой малые, как говорят, *упругие колебания*, или *волны*. Мы начнем с рассмотрения плоской упругой волны в неограниченной изотропной среде, т. е. волны, в которой деформация  $\mathbf{u}$  является функцией только от одной из координат, скажем, от  $x$  (и от времени). Все производные по  $y$  и  $z$  в уравнениях (22,2) исчезают, и мы получаем для отдельных компонент вектора  $\mathbf{u}$  следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (22,3)$$

уравнение для  $u_z$  такое же, как для  $u_y$ , где введены обозначения<sup>1)</sup>:

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}. \quad (22,4)$$

Уравнения (22,3) представляют собой обычные волновые уравнения в одном измерении, и входящие в них величины  $c_l$  и  $c_t$  являются скоростями распространения волны. Мы видим, что скорость распространения  $l$  оны оказывается различной для компоненты  $u_x$ , с одной стороны, и компонент  $u_y$ ,  $u_z$  — с другой.

Таким образом, упругая волна представляет собой по существу две независимо распространяющиеся волны. В одной из них ( $u_x$ ) смещение направлено вдоль распространения самой волны; такая волна называется продольной и распространяется со скоростью  $c_l$ . В другой ( $u_y$ ,  $u_z$ ) — смещение направлено в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения; такая волна называется поперечной и распространяется со скоростью  $c_t$ . Заметим, что, как видно из (22,4), скорость распространения продольных волн всегда больше, чем скорость поперечных. Именно, всегда имеет место неравенство<sup>2)</sup>

$$c_l > c_t \sqrt{\frac{4}{3}}. \quad (22,5)$$

Скорости  $c_l$  и  $c_t$  часто называют *продольной* и *поперечной скоростями звука*.

Мы знаем, что изменение объема при деформации определяется суммой диагональных членов тензора деформации, т. е. величиной

<sup>1)</sup> Дадим также выражения для  $c_l$  и  $c_t$  через модули сжатия и сдвига и через коэффициенты Ламэ:

$$c_l = \sqrt{\frac{3K+4\mu}{3\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

<sup>2)</sup> Поскольку фактически  $\sigma$  меняется лишь в пределах от 0 до  $1/2$  (см. сноску на стр. 25), то всегда имеет место и более сильное неравенство

$$c_l > c_t \sqrt{2}.$$

$u_{ii} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}$ . В поперечной волне имеются только компоненты  $u_y, u_z$ , и поскольку они не зависят ни от  $y$ , ни от  $z$ , то для такой волны  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Таким образом, поперечные волны не связаны с изменением объёма отдельных участков тела. Напротив, для продольных волн  $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$ ; эти волны сопровождаются сжатиями и расширениями в теле.

Разделение волны на две независимо распространяющиеся с разными скоростями части можно произвести и в общем случае произвольной (не плоской) упругой волны в неограниченном пространстве.

Перепишем уравнение (22,2), введя в него скорости  $c_l$  и  $c_t$ :

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_l^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (22,6)$$

Представим вектор  $\mathbf{u}$  в виде суммы двух частей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (22,7)$$

из которых одна удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0, \quad (22,8)$$

а другая — условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_t = 0. \quad (22,9)$$

Из векторного анализа известно, что такое представление всегда возможно (это есть представление вектора в виде суммы ротора некоторого вектора и градиента некоторого скаляра).

При подстановке  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$  в (22,6) получаем:

$$\ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t = c_l^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_t. \quad (22,10)$$

Применим к обеим сторонам этого уравнения операцию  $\operatorname{div}$ . Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0$ , то мы получим:

$$\operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}}_l = c_l^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_t,$$

или

$$\operatorname{div} (\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0.$$

С другой стороны,  $\operatorname{rot}$  стоящего в скобках выражения тоже равен нулю в силу (22,9). Но если  $\operatorname{rot}$  и  $\operatorname{div}$  некоторого вектора исчезают во всём пространстве, то этот вектор тождественно равен нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (22,11)$$

Аналогично применяя к уравнению (22,10) операцию  $\operatorname{rot}$  и помня, что  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$  и что  $\operatorname{rot}$  всякого градиента равен нулю, находим:

$$\operatorname{rot} (\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t) = 0.$$

Поскольку  $\operatorname{div}$  стоящего в скобках выражения тоже равно нулю, то мы приходим опять к уравнению того же вида, как и (22,11):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0. \quad (22,12)$$

Уравнения (22,11) и (22,12) представляют собой обычные волновые уравнения (в трёх измерениях). Каждое из них соответствует распространению упругой волны со скоростью соответственно  $c_l$  или  $c_t$ . Одна из этих волн ( $\mathbf{u}_l$ ) не связана с изменением объёма (в силу  $\operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0$ ), а другая ( $\mathbf{u}_t$ ) сопровождается объёмными сжатиями и расширениями.

В монохроматической упругой волне вектор смещения имеет вид

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \}, \quad (22,13)$$

где  $\mathbf{u}_0$  — функция координат. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$c_l^2 \Delta \mathbf{u}_0 + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 + \omega^2 \mathbf{u}_0 = 0, \quad (22,14)$$

получающемуся при подстановке (22,13) в (22,6). Продольная и поперечная части монохроматической волны удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \mathbf{u}_l + k_l^2 \mathbf{u}_l = 0, \quad \Delta \mathbf{u}_t + k_t^2 \mathbf{u}_t = 0, \quad (22,15)$$

где  $k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$  — волновые векторы продольной и поперечной волн.

Наконец, рассмотрим отражение и преломление плоской монохроматической упругой волны на границе раздела между двумя различными упругими средами. При этом надо иметь в виду, что при отражении и преломлении характер волны, вообще говоря, меняется. Если на границу раздела падает чисто поперечная или чисто продольная волна, то в результате получаются смешанные волны, содержащие как поперечные, так и продольные части. Характер волны не меняется (как это явствует из соображений симметрии) только в случае перпендикулярного падения волны на поверхность раздела и в случае падения под произвольным углом поперечной волны с параллельными плоскости раздела колебаниями.

Соотношения, определяющие направления отражённой и преломлённой волн, могут быть получены непосредственно из постоянства частоты и касательных к поверхности раздела компонент волнового вектора<sup>1)</sup>. Пусть  $\theta$  и  $\theta'$  — угол падения и угол отражения (или преломления), а  $c$ ,  $c'$  — скорости обеих рассматриваемых волн. Тогда

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'}. \quad (22,16)$$

<sup>1)</sup> См. «Гидродинамика», § 65 (в книге «Механика сплошных сред»). Все изложенные там соображения полностью применимы и здесь.

Пусть, например, падающая волна поперечна. Тогда  $c = c_{t1}$  есть скорость поперечных волн в первой среде. Для поперечной же отражённой волны имеем тоже  $c' = c_{t1}$ , и потому (22,16) даст  $\theta = \theta'$ ,

т. е. угол падения равен углу отражения. Для продольной же отражённой волны имеем  $c' = c_{l1}$ , и потому

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{l1}}{c_{t1}}.$$

Для поперечной части преломлённой волны имеем  $c' = c_{t2}$  и при поперечной же падающей волне имеем:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{t2}}.$$

Аналогично для продольной преломлённой волны имеем:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{l1}}{c_{l2}}.$$

### Задачи

1. Определить коэффициент отражения продольной монохроматической волны, падающей под произвольным углом на границу тела с вакуумом<sup>1)</sup>.

Решение. При отражении под произвольным углом возникают как продольная, так и поперечная отражённая волны. Из соображений симметрии заранее ясно, что вектор смещения в поперечной отражённой волне будет лежать целиком в плоскости падения (рис. 20;  $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_l, \mathbf{n}_t$  — единичные векторы вдоль направлений падающей, продольной и поперечной отражённых волн, а  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_t$  — соответствующие векторы смещений). Полное смещение в теле равно сумме (общий множитель в  $e^{-i\omega t}$  для краткости опускаем)

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{n}_0 e^{ik_0 r} + A_l \mathbf{n}_l e^{ik_l r} + A_t [\mathbf{a} \mathbf{n}_t] e^{ik_t r}$$

( $\mathbf{a}$  — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости падения). Абсолютные величины волновых векторов равны:  $k_0 = k_l = \frac{\omega}{c_l}$ ,  $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ , а углы падения  $\theta_0$  и отражения  $\theta_l, \theta_t$  связаны посредством  $\theta_l = \theta_0$ ,  $\sin \theta_t = \sin \theta_0 \frac{c_t}{c_l}$ . Для компонент тензора деформации на

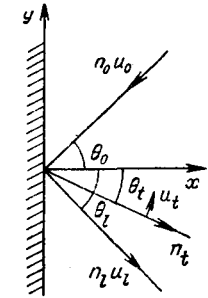


Рис. 20.

границе тела получаем:

$$u_{xx} = ik_0 (A_0 + A_l) \cos^2 \theta_0 + i A_l k_l \cos \theta_l \sin \theta_l,$$

$$u_{ll} = ik_0 (A_0 + A_l),$$

$$u_{xy} = ik_0 (A_0 - A_l) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{i}{2} A_l k_l (\cos^2 \theta_l - \sin^2 \theta_l)$$

<sup>1)</sup> Более общий случай отражения звуковых волн от границы твёрдого тела с жидкостью, а также аналогичную задачу об отражении волны, падающей из жидкости на твёрдое тело, см. в книге: Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957, § 4.

(общие экспоненциальные множители опускаем). Компоненты тензора напряжений вычисляем по общей формуле (5,11), которую удобно писать здесь в виде

$$\sigma_{ik} = 2\varrho c_l^2 u_{ik} + \varrho (c_l^2 - 2c_t^2) u_{ll} \delta_{ik}.$$

Граничные условия на свободной поверхности среды гласят  $\sigma_{ik} n_k = 0$ , откуда  $\sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0$ , и дают два уравнения, из которых можно выразить  $A_l, A_t$  через  $A_0$ . В результате вычисления получается:

$$A_l = A_0 \frac{c_l^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_l}{c_l^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_l},$$

$$A_t = -A_0 \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_l}{c_l^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_l}.$$

При  $\theta_0 = 0$  имеем  $A_l = -A_0$ ,  $A_t = 0$ , т. е. волна отражается целиком как продольная. Отношение перпендикулярной к поверхности среды компоненты плотности потока энергии в отражённой продольной волне к такому же потоку в падающей волне есть

$$R_l = \left| \frac{A_l}{A_0} \right|^2.$$

Аналогичное отношение для отражённой поперечной волны есть

$$R_t = \frac{c_t \cos \theta_t}{c_l \cos \theta_0} \left| \frac{A_t}{A_0} \right|^2.$$

Разумеется,  $R_l + R_t = 1$ .

2. То же, если падающая волна поперечная (и направление колебаний в ней лежит в плоскости падения)<sup>1)</sup>.

Решение. Волна отражается в виде поперечной же и продольной волн, причём  $\theta_l = \theta_0$ ,  $c_l \sin \theta_l = c_l \sin \theta_0$ . Полный вектор смещения:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a} \mathbf{n}_0] A_0 e^{ik_0 r} + \mathbf{n}_l A_l e^{ik_l r} + [\mathbf{a} \mathbf{n}_t] A_t e^{ik_t r}.$$

Для амплитуд отражённых волн получаются выражения:

$$\frac{A_l}{A_0} = \frac{c_l^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_0}{c_l^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0},$$

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_l}{c_l^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0}.$$

3. Определить частоты радиальных собственных колебаний упругого шара радиуса  $R$ .

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в центре шара. При радиальных колебаниях  $\mathbf{u}$  направлено по радиусу и зависит только от  $r$  (и от  $t$ ). Поэтому  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ . Введём «потенциал» смещения  $\varphi$  согласно  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} = \partial \varphi / \partial r$ . Выраженное через  $\varphi$  уравнение движения сводится к волновому уравнению  $c_l^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}$ , или для периодических по

<sup>1)</sup> Если колебания перпендикулярны плоскости падения, то волна отражается целиком в виде такой же волны, так что  $R_t = 1$ .

времени ( $\sim e^{-i\omega t}$ ) колебаний:

$$\Delta \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -k^2 \varphi, \quad k = \frac{\omega}{c_l}. \quad (1)$$

Решение, конечное во всем объёме шара, включая его центр, есть

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{r}$$

(временной множитель не пишем). Радиальные напряжения:

$$\sigma_{rr} = \rho \left\{ (c_l^2 - 2c_t^2) u_{ii} + 2c_t^2 u_{rr} \right\} = \rho \left\{ (c_l^2 - 2c_t^2) \Delta \varphi + 2c_t^2 \varphi'' \right\}$$

или, используя уравнение (1):

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{rr} = -\omega^2 \varphi - 4c_t^2 \frac{1}{r} \varphi'. \quad (2)$$

Граничное условие  $\sigma_{rr}(R) = 0$  приводит к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} kR}{kR} = \frac{1}{1 - (kR c_l / 2c_t)^2}. \quad (3)$$

Его корни определяют частоты собственных колебаний  $\omega = c_l k$ .

4. Определить частоту радиальных колебаний сферической полости в неограниченной упругой среде, для которой  $c_l \gg c_t$  (М. А. Исакович, 1949).

Решение. В неограниченной среде радиальные колебания полости сопровождаются излучением продольных звуковых волн, что приводит к потере энергии и тем самым к затуханию колебаний. При  $c_l \gg c_t$  (т. е.  $K \gg \mu$ ) это излучение будет слабым и можно говорить о собственных частотах колебаний с малым коэффициентом затухания.

Ищем решение уравнения (1) в виде расходящейся сферической волны

$$\varphi = A \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \frac{\omega}{c_l}$$

и с помощью (2) получаем из граничного условия  $\sigma_{rr}(R) = 0$ :

$$\left( kR \frac{c_l}{c_t} \right)^2 = 4(1 - ikR).$$

Отсюда (при  $c_l \gg c_t$ ):

$$\omega = \frac{2c_l}{R} \left( 1 - i \frac{c_t}{c_l} \right).$$

Вещественная часть  $\omega$  даёт собственную частоту колебаний, а мнимая — коэффициент затухания; в несжимаемой среде ( $c_l \rightarrow \infty$ ) затухание, естественно, отсутствовало бы. Эти колебания — специфический результат сопротивляемости среды по отношению к сдвигу ( $\mu \neq 0$ ). Обратим внимание на то, что для них  $kR = 2c_l/c_t \ll 1$ , т. е. соответствующая этим колебаниям длина волны велика по сравнению с  $R$  (интересно сравнить это с колебаниями упругой сферы, для которых при  $c_l \gg c_t$  первая собственная частота определяется согласно (3) из  $kR = \pi$ ).

### § 23. Упругие волны в кристаллах

Распространение упругих волн в анизотропной среде, т. е. в кристаллах, подчиняется более сложным закономерностям, чем распространение волн в изотропном теле. Для исследования таких волн мы должны обратиться к общим уравнениям движения

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

и воспользоваться для  $\sigma_{ik}$  общим выражением (10,3):

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}.$$

Соответственно сказанному в начале предыдущего параграфа под  $\lambda_{iklm}$  надо везде подразумевать адиабатические значения модулей упругости.

Подставляя  $\sigma_{ik}$  в уравнения движения, получаем:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} = \frac{\lambda_{iklm}}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}. \end{aligned}$$

Поскольку тензор  $\lambda_{iklm}$  симметричен по индексам  $l$  и  $m$ , то, меняя во втором члене обозначение индексов суммирования  $l$  и  $m$  на обратное, находим, что первый и второй члены тождественны. Таким образом, мы получаем уравнения движения в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (23,1)$$

Рассмотрим монохроматическую упругую волну в кристалле. Для этого мы должны искать решение уравнений движения в виде

$$u_i = u_{0i} e^{i(kr - \omega t)}$$

( $u_{0i}$  — постоянные), причём соотношение между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$  должно быть определено так, чтобы написанная функция действительно удовлетворяла уравнению (23,1). Дифференцирование  $u_i$  по времени приводит к умножению на  $-i\omega$ , а дифференцирование по  $x_k$  — к умножению на  $ik_k$ . Поэтому уравнение (23,1) после подстановки превращается в

$$\rho \omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m.$$

Написав  $u_i = \delta_{im} u_m$ , переписываем это равенство в виде

$$(\rho \omega^2 \delta_{im} - \lambda_{iklm} k_k k_l) u_m = 0. \quad (23,2)$$

Это есть система трёх однородных уравнений первой степени относительно неизвестных  $u_x, u_y, u_z$ . Как известно, такая система имеет

отличные от нуля решения только в том случае, если детерминант, составленный из коэффициентов при  $u_m$ , равен нулю. Таким образом, должно выполняться условие

$$|\lambda_{iklm} k_k k_l - \rho \omega^2 \delta_{im}| = 0. \quad (23,3)$$

Это — уравнение третьей степени по  $\omega^2$ . Оно имеет три, вообще говоря, различных корня. Каждый из этих корней определяет частоту как функцию от волнового вектора  $\mathbf{k}$ <sup>1)</sup>. Подставляя поочерёдно каждый из них обратно в уравнения (23,2), мы получим из этих уравнений компоненты соответствующего смещения  $u_i$  (при этом, конечно, в силу однородности уравнений определяются только отношения между тремя компонентами  $u_i$ , но не их абсолютные величины, так что все  $u_i$  могут быть ещё умножены на общую произвольную постоянную).

Скорость распространения волны (*групповая скорость*) определяется производной от частоты по волновому вектору. В изотропном теле частота пропорциональна абсолютному значению  $k$ , и потому направление скорости  $\mathbf{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  совпадает с направлением  $\mathbf{k}$ . В кристаллах такая зависимость не имеет места и потому направление распространения волны не совпадает с направлением её волнового вектора.

Из уравнения (23,3) видно, что  $\omega$  является однородной функцией первого порядка от компонент  $k_i$  вектора  $\mathbf{k}$  (если ввести в качестве неизвестной величины отношение  $\omega/k$ , то коэффициенты уравнения не зависят от  $k$ ). Поэтому скорость распространения  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  есть однородная функция нулевого порядка от  $k_i$ . Таким образом, скорость волны, являясь функцией её направления, не зависит от частоты.

В связи с наличием трёх различных зависимостей между  $\omega$  и  $k$  для каждого направления в кристалле имеется три, вообще говоря, различные скорости распространения упругих волн. Лишь в некоторых исключительных направлениях эти скорости могут совпадать.

В изотропной среде двум разным скоростям распространения соответствовали волны чисто продольные и чисто поперечные. В противоположность этому в кристалле каждой скорости распространения соответствует волна, вектор смещения в которой обладает составляющими как параллельными, так и перпендикулярными  $\mathbf{k}$  направлению распространения.

Наконец, отметим ещё следующее обстоятельство. Для каждого данного волнового вектора  $\mathbf{k}$  в кристалле могут существовать три

<sup>1)</sup> В изотропном теле это уравнение привело бы к уже известному нам результату: одному решению  $\omega^2 = c_l^2 k^2$  и двум совпадающим решениям  $\omega^2 = c_t^2 k^2$ .

волны (с различными частотами и скоростями распространения). Легко видеть, что векторы смещения  $\mathbf{u}$  в этих трёх волнах взаимно перпендикулярны. Действительно, при заданном  $\mathbf{k}$  (23,3) можно рассматривать как уравнение, определяющее главные значения  $\rho \omega^2$  симметричного (по индексам  $i, m$ ) тензора второго ранга  $\lambda_{iklm} k_k k_l$ <sup>1)</sup>. Уравнения (23,2) определяют тогда главные направления этого тензора, которые, как известно, взаимно перпендикулярны.

### Задачи

Определить зависимость частоты от волнового вектора для упругих волн, распространяющихся в кристалле гексагональной системы.

Решение. Отличные от нуля компоненты тензора  $\lambda_{iklm}$  в координатах  $x, y, z$  связаны с его компонентами в «координатах»  $\xi, \eta, z$  (см. § 10) посредством соотношений:

$$\begin{aligned} \lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = a + b, & \quad \lambda_{xxyy} = a - b, & \quad \lambda_{xyxy} = b, \\ \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = c, & \quad \lambda_{xzxx} = \lambda_{yzyz} = d, & \quad \lambda_{zzzz} = f, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\lambda_{z\xi z\xi} = 4a, \quad \lambda_{z\xi \eta \eta} = 8b, \quad \lambda_{z\xi \eta z} = 2c, \quad \lambda_{z\eta z\eta} = 2d.$$

Ось  $z$  направлена по оси симметрии 6-го порядка; направления же осей  $x, y$  могут быть выбраны произвольным образом. Выберем плоскость  $x, z$  так, чтобы в ней лежал волновой вектор  $\mathbf{k}$ . Тогда

$$k_x = k \sin \theta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и осью  $z$ . Составляя уравнение (23,3) и решая его, получим три различные зависимости  $\omega$  от  $k$ :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k^2}{\rho} (b \sin^2 \theta + d \cos^2 \theta), \\ \omega_{2,3}^2 &= \frac{k^2}{2\rho} \left\{ (a+b) \sin^2 \theta + f \cos^2 \theta + d \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{[(a+b-d) \sin^2 \theta + (d-f) \cos^2 \theta]^2 + 4(c+d)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right\}. \end{aligned}$$

### § 24. Поверхностные волны

Особым видом упругих волн являются волны, распространяющиеся вблизи поверхности тела и не проникающие в глубь вещества (*волны Рэлея*).

Напишем уравнения движения в виде (22,11) и (22,12):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (24,1)$$

<sup>1)</sup> В силу свойств симметрии тензора  $\lambda_{iklm}$  имеем:

$$\lambda_{iklm} k_k k_l = \lambda_{kiml} k_k k_l = \lambda_{mlki} k_k k_l.$$

Последнее выражение отличается от  $\lambda_{mki} k_k k_l$  только обозначением индексов суммирования  $k$  и  $l$ , т. е. тензор  $\lambda_{iklm} k_k k_l$  действительно симметричен.

(где  $u$  — какая-нибудь из компонент векторов  $u_l$ ,  $u_t$ , а  $c$  — соответствующая ей скорость  $c_l$  или  $c_t$ ) и будем искать решения, соответствующие таким поверхностным волнам. Поверхность упругой среды будем предполагать плоской (и неограниченной). Эту плоскость выберем в качестве плоскости  $x, y$ ; области среды пусть соответствуют  $z < 0$ .

Рассмотрим «плоскую» монохроматическую поверхностную волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ . Соответственно этому ищем  $u$  в виде

$$u = e^{i(kx - \omega t)} f(z).$$

Подставляя это выражение в (24,1), получаем для функции  $f(z)$  уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f.$$

Если  $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0$ , то это уравнение приводит к периодической функции  $f$ , т. е. мы получили бы обыкновенную плоскую волну, не исчезающую во всём объёме тела. Поэтому мы должны считать, что  $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$ . Тогда для  $f$  получаем решения вида

$$f(z) = \text{const} \cdot \exp\left(\pm z \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\right).$$

Решение со знаком минус в показателе соответствовало бы неограниченному возрастанию деформации по направлению внутрь тела (т. е. при  $z < 0$ ). Такое решение, очевидно, не имеет смысла, и мы должны выбрать знак плюс в показателе.

Таким образом, мы приходим к следующему решению уравнений движения:

$$u = \text{const} \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{\kappa z}, \quad (24,2)$$

где

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (24,3)$$

Оно соответствует волне, быстро (экспоненциально) затухающей внутрь тела, т. е. распространяющейся только вблизи его поверхности. Величина  $\kappa$  определяет скорость этого затухания.

Истинный вектор деформации  $u$  в волне является суммой векторов  $u_l$  и  $u_t$ , компоненты каждого из которых удовлетворяют уравнению (24,1) со скоростью  $c = c_l$  для  $u_l$  и  $c = c_t$  для  $u_t$ . В случае объёмных волн в неограниченной среде эти две части представляют собой две независимо распространяющиеся волны. В случае же поверхностных волн такое разделение на две независимые части оказывается (благодаря наличию граничных условий) невозможным.

Вектор смещения  $u$  должен быть определённой линейной комбинацией векторов  $u_l$  и  $u_t$ . По поводу этих последних надо также отметить, что они отнюдь не имеют теперь наглядного смысла параллельных и перпендикулярных к направлению распространения компонент смещения.

Для определения линейной комбинации векторов  $u_l$  и  $u_t$ , дающей истинное смещение  $u$ , надо обратиться к предельным условиям на границе тела. Отсюда же определится связь между волновым вектором  $k$  и частотой  $\omega$ , а следовательно, и скорость распространения волны. На свободной поверхности должно выполняться условие  $\sigma_{ik} n_k = 0$ . Поскольку вектор нормали  $n$  направлен по оси  $z$ , то отсюда следуют условия

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

откуда

$$u_{xz} = 0, \quad u_{yz} = 0, \quad \sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma)u_z = 0. \quad (24,4)$$

Поскольку все величины не зависят от координаты  $y$ , то второе из этих условий даёт

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0.$$

С учётом (24,2) отсюда следует

$$u_y = 0. \quad (24,5)$$

Таким образом, в поверхностной волне вектор деформации  $u$  лежит в плоскости, проведённой через направление распространения перпендикулярно к поверхности.

«Поперечная» часть волны  $u_t$  должна удовлетворять условию (22,8)  $\text{div } u_t = 0$ , или

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0.$$

Зависимость  $u_{tx}$  и  $u_{tz}$  от  $x$  и  $z$  определяется множителем  $e^{ikx + \kappa_t z}$ , где  $\kappa_t$  определяется выражением (24,3) с  $c = c_t$ , т. е.

$$\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}.$$

Поэтому написанное условие приводит к равенству

$$iku_{tx} + \kappa_t u_{tz} = 0,$$

или

$$\frac{u_{tx}}{u_{tz}} = -\frac{\kappa_t}{ik}.$$

Таким образом, мы можем написать:

$$u_{tx} = \kappa_t a e^{ikx + \kappa_t z - i\omega t}, \quad u_{tz} = -ika e^{ikx + \kappa_t z - i\omega t}, \quad (24,6)$$

где  $a$  есть некоторая постоянная.



«Продольная» часть  $u_l$  удовлетворяет условию (22,9)  $\text{rot } u_l = 0$  или

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$iku_{lz} - \kappa_l u_{lx} = 0 \quad \left( \kappa_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}} \right).$$

Таким образом, должно быть:

$$u_{lx} = kbe^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad u_{lz} = -i\kappa_l be^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad (24,7)$$

где  $b$  — постоянная.

Теперь воспользуемся первым и третьим из условий (24,4). Выражая  $u_{ik}$  через производные от  $u_i$  и вводя скорости  $c_l$  и  $c_t$ , переписываем эти условия в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad (24,8)$$

$$c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0.$$

Сюда надо подставить

$$u_x = u_{lx} + u_{tx}, \quad u_z = u_{lz} + u_{tz}.$$

В результате первое из условий (24,8) даёт уравнение

$$a(k^2 + \kappa_l^2) + 2bk\kappa_l = 0. \quad (24,9)$$

Второе приводит к равенству

$$2ac_t^2 \kappa_l k + b[c_l^2(\kappa_l^2 - k^2) + 2c_t^2 k^2] = 0.$$

Разделив это уравнение на  $c_l^2$  и подставив

$$\kappa_l^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_l^2} = -(k^2 - \kappa_t^2) \frac{c_t^2}{c_l^2},$$

переписываем его в виде

$$2a\kappa_l k + b(k^2 + \kappa_t^2) = 0. \quad (24,10)$$

Условие совместности двух однородных уравнений (24,9) и (24,10) даёт

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2 \kappa_l \kappa_t$$

или, возводя в квадрат и подставляя значения  $\kappa_l^2$ ,  $\kappa_t^2$ :

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right)^4 = 16k^4 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right). \quad (24,11)$$

Из этого уравнения определяется связь между  $\omega$  и  $k$ . Для этого удобно положить

$$\omega = c_l k \xi. \quad (24,12)$$

Тогда  $k^4$  с обеих сторон уравнения сократится, и, раскрывая скобки, мы получим для величины  $\xi$  уравнение

$$\xi^8 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0. \quad (24,13)$$

Мы видим отсюда, что  $\xi$  есть число, зависящее только от отношения  $\frac{c_t}{c_l}$ , являющегося некоторой характерной для каждого данного вещества постоянной и зависящего в свою очередь только от коэффициента Пуассона:

$$\frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}}.$$

Величина  $\xi$  должна быть, разумеется, вещественной положительной, причём  $\xi < 1$  (так, чтобы  $\kappa_l$ ,  $\kappa_t$  были вещественны). Уравнение (24,13) имеет только один корень, удовлетворяющий этим условиям, так что для каждого данного значения  $c_t/c_l$  получается всего одно определённое значение  $\xi$ .

Таким образом, для поверхностных волн, как и для объёмных, частота пропорциональна волновому вектору. Коэффициент пропорциональности между ними есть скорость распространения волны

$$U = c_l \xi. \quad (24,14)$$

Этим определяется скорость распространения поверхностных волн через скорости  $c_t$  и  $c_l$  поперечных и продольных объёмных волн. Отношение амплитуд поперечной и продольной частей волны определяется по значению  $\xi$  формулой

$$\frac{a}{b} = -\frac{2-\xi^2}{2\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (24,15)$$

Отношение  $c_t/c_l$  фактически меняется для различных веществ в пределах от  $1/\sqrt{2}$  до 0, что соответствует изменению  $\sigma$  от 0 до  $1/2$ ; при этом  $\xi$  меняется от 0,874 до 0,955. На рис. 21 дан график зависимости  $\xi$  от  $\sigma$ .

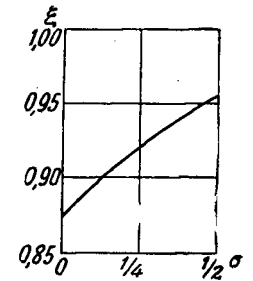


Рис. 21.

## Задача

Плоскопараллельный пласт толщины  $h$  (среда 1) лежит на упругом полупространстве (среда 2). Определить зависимость частоты от волнового вектора для поперечных волн в пласте с направлением колебаний, параллельным границам пласта.

Решение. Выберем плоскость раздела между пластом и полупространством в качестве плоскости  $x, y$ , причём упругому полупространству соответствуют  $z < 0$ , а пластику  $h \geq z \geq 0$ . В пласте имеем:

$$u_{x1} = u_{z1} = 0, \quad u_{y1} = f(z) e^{i(kx - \omega t)},$$

а в среде 2 пишем затухающую в глубину неё волну

$$u_{x2} = u_{z2} = 0, \quad u_{y2} = A e^{\kappa_2 z} e^{i(kx - \omega t)}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{t2}^2}}.$$

Для функции  $f(z)$  имеем уравнение

$$f'' + \kappa_1^2 f = 0, \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2}$$

(мы увидим ниже, что должно быть  $\kappa_1^2 > 0$ ), откуда

$$f(z) = B \sin \kappa_1 z + C \cos \kappa_1 z.$$

На свободной границе пласта ( $z = h$ ) должно быть  $\sigma_{zy} = 0$ , т. е.  $\frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = 0$ .

На границе же между обеими средами ( $z = 0$ ) имеем условия:

$$u_{y1} = u_{y2}, \quad \mu_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{y2}}{\partial z}$$

( $\mu_1, \mu_2$  — модули сдвига обеих сред). Из этих условий находим три уравнения для  $A, B, C$ , условие совместности которых даёт

$$\operatorname{tg} \kappa_1 h = \frac{\mu_2 \kappa_2}{\mu_1 \kappa_1}.$$

Это уравнение определяет в неявном виде зависимость  $\omega$  от  $k$ ; оно имеет решения лишь при вещественных  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , так что всегда  $c_{t2} > \frac{\omega}{k} > c_{t1}$ . Отсюда видно, что распространение рассматриваемых волн возможно лишь при условии  $c_{t2} > c_{t1}$ .

## § 25. Колебания стержней и пластинок

Волны, распространяющиеся в тонких пластинках и стержнях, существенно отличаются от волн, распространяющихся в среде, неограниченной во всех направлениях. При этом речь идёт о волнах, длина которых велика по сравнению с толщиной стержня или пластинки. В обратном предельном случае длин волн, малых по сравнению с этой толщиной, стержень или пластинку можно было бы вообще рассматривать как неограниченные во всех направлениях, и мы получили бы снова соотношения, имевшие место в неограниченных средах.

Необходимо различать волны, в которых колебания происходят параллельно оси стержня или плоскости пластинки, от волн с перпендикулярными колебаниями. Начнём с изучения продольных волн в стержнях.

Продольная деформация стержня (однородная вдоль его сечения), на боковую поверхность которого не действуют никакие внешние силы, представляет собой простое растяжение или сжатие. Таким образом, продольные волны в стержне представляют собой распространяющиеся вдоль его длины простые растяжения или сжатия. Но при простом растяжении отлична от нуля только компонента  $\sigma_{zz}$  тензора напряжений (ось  $z$  — вдоль длины стержня), связанная с тензором деформации посредством (см. § 5):

$$\sigma_{zz} = E u_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Подставляя это в общее уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x_k},$$

находим:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \quad (25,1)$$

Это есть уравнение продольных колебаний в стержнях. Мы видим, что оно имеет вид обычного волнового уравнения. Скорость распространения продольных волн в стержнях оказывается равной

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (25,2)$$

Сравнивая её с выражением (22,4) для  $c_l$ , видим, что она меньше скорости распространения продольных волн в неограниченной среде.

Перейдём теперь к продольным волнам в тонких пластинках. Уравнения движения для таких колебаний можно написать сразу, подставив в уравнениях равновесия (13,4) —  $\rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$  и —  $\rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$  вместо  $P_x$  и  $P_y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (25,3)$$

Рассмотрим «плоскую» волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ , т. е. волну, в которой деформация зависит только от координаты  $x$ , но не от  $y$ . Тогда уравнения (25,3) сильно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (25,4)$$

Мы получаем, таким образом, опять простые волновые уравнения. Стоящие в них коэффициенты различны для  $u_x$  и  $u_y$ . Скорость распространения волны с колебаниями, параллельными направлению распространения ( $u_x$ ), равна

$$V \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (25,5)$$

Скорость же волны ( $u_y$ ) с колебаниями, перпендикулярными к направлению распространения (но по-прежнему лежащими в плоскости пластинки), равна скорости  $c_t$  поперечных волн в неограниченной среде.

Мы видим, таким образом, что «продольные» волны в стержнях и пластинках обладают таким же характером, как и волны в неограниченной среде, отличаясь лишь другой величиной своей скорости, по-прежнему не зависящей от частоты. Совсем иные соотношения получаются для так называемых волн изгиба в пластинках и стержнях, при которых колебания происходят в направлении, перпендикулярном к оси стержня или плоскости пластинки, т. е. сопровождаются их изгибом.

Уравнения свободных колебаний пластинки можно написать непосредственно на основании уравнения равновесия (12,5). Для этого надо заменить в нём — $P$  произведением ускорения  $\ddot{\zeta}$  на массу  $\rho h$ , приходящуюся на единицу площади поверхности пластинки. Таким образом, получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta = 0 \quad (25,6)$$

( $\Delta$  — двухмерный оператор Лапласа).

Рассмотрим монохроматическую упругую волну, соответственно чему будем искать решение уравнения (25,6) в виде

$$\zeta = \text{const} \cdot e^{i(kr - \omega t)} \quad (25,7)$$

(волновой вектор  $\mathbf{k}$  имеет, конечно, всего две компоненты  $k_x$  и  $k_y$ ). Подстановка в (25,6) приводит к уравнению

$$-\rho \omega^2 + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} k^4 = 0.$$

Отсюда получаем следующее соотношение между частотой и волновым вектором волны:

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{h^2 E}{12\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (25,8)$$

Таким образом, частота оказывается пропорциональной квадрату абсолютной величины волнового вектора, в то время как в волнах в неограниченной среде она пропорциональна первой её степени.

Зная соотношение между частотой и волновым вектором, можно определить скорость распространения волны согласно формуле

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Производные от  $k^2$  по компонентам  $k_x$ ,  $k_y$  равны соответственно  $2k_x$ ,  $2k_y$ . Таким образом, скорость распространения волны равна

$$U = \sqrt{\frac{h^2 E}{3\rho(1-\sigma^2)}} k. \quad (25,9)$$

Она пропорциональна волновому вектору, а не постоянна, как для волн в неограниченной трёхмерной среде<sup>1)</sup>.

Аналогичные результаты получаются и для волн изгиба в тонких стержнях. Самые колебания изгиба стержня мы будем предполагать малыми. Уравнения движения получим, заменив в уравнениях равновесия слабо изогнутого стержня (20,4) — $K_x$ , — $K_y$  произведениями ускорений  $\ddot{X}$ ,  $\ddot{Y}$  на массу  $\rho S$  единицы длины стержня ( $S$  — площадь его сечения). Таким образом,

$$\rho S \ddot{X} = EI_y \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}, \quad \rho S \ddot{Y} = EI_x \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4}. \quad (25,10)$$

Решение этих уравнений ищем опять в виде

$$X = \text{const} \cdot e^{i(kz - \omega t)}, \quad Y = \text{const} \cdot e^{i(kz - \omega t)}.$$

Подстановка в (25,10) приводит к следующему соотношению между частотой и волновым вектором:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k^2 \quad (25,11)$$

для колебаний соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ . Соответствующие скорости распространения равны

$$U^{(x)} = 2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k, \quad U^{(y)} = 2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k. \quad (25,12)$$

Наконец, особым случаем колебаний стержней являются так называемые крутильные колебания (колебания кручения). Уравнения движения стержня, совершающего крутильные колебания, получаются приравниванием  $C \frac{\partial \tau}{\partial z}$  (см. § 18) производной по времени от момента

<sup>1)</sup> Волновой вектор  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны. Поэтому скорость распространения должна была бы неограниченно возрастать при стремлении  $\lambda$  к нулю. Физическая нелепость этого результата связана с тем, что формула (25,9) в действительности неприменима к коротким волнам.

количества движения стержня, отнесённого к единице его длины. Этот момент равен  $QI \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , где  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  — угловая скорость вращения ( $\varphi$  — угол поворота данного сечения стержня), а  $I = \int (x^2 + y^2) df$  — момент инерции сечения относительно его центра инерции (при чисто крутильных колебаниях каждое сечение стержня совершает вращательные колебания вокруг оси инерции стержня, остающейся неподвижной). Написав  $\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , получаем уравнение движения в виде

$$C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = QI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25,13)$$

Отсюда видим, что скорость распространения крутильных колебаний вдоль стержня равна

$$V \sqrt{\frac{C}{QI}}. \quad (25,14)$$

### Задачи

1. Определить частоты продольных собственных колебаний стержня (длины  $l$ ), один из концов которого закреплён, а другой — свободен.

Решение. На закреплённом конце ( $z=0$ ) должно быть  $u_z=0$ , а на свободном конце ( $z=l$ )  $\sigma_{zz} = E u_{zz} = 0$ , т. е.  $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ . Ищем решение уравнения (25,1) в виде  $u_z = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kz$ , где  $k = \omega \sqrt{\frac{Q}{E}}$ . Из условия при  $z=l$  имеем  $\cos kl = 0$ , откуда для собственных частот получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{Q}} \frac{\pi}{2l} (2n+1)$$

( $n$  — целые числа).

2. То же для стержня, оба конца которого свободны или оба закреплены.

Решение. В обоих случаях  $\omega = \sqrt{\frac{E}{Q}} \frac{\pi}{l} n$ .

3. Определить частоты собственных колебаний струны (длины  $l$ ).

Решение. Уравнение движения струны есть

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{QS}{T} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

(ср. уравнение равновесия (20,17)). Граничные условия:  $X=0$  при  $z=0, l$ . Собственные частоты

$$\omega = \sqrt{\frac{QS}{T}} \frac{n\pi}{l}.$$

4. Определить собственные поперечные колебания стержня (длины  $l$ ) с заделанными концами.

Решение. Уравнение (25,10) при подстановке в него

$$X = X_0(z) \cos(\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = \kappa^4 X_0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{QS}{EI_y}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$X_0 = A \cos \kappa z + B \sin \kappa z + C \operatorname{ch} \kappa z + D \operatorname{sh} \kappa z.$$

Постоянные  $A, B, C, D$  определяются из граничных условий  $X=0, \frac{dX}{dz}=0$  при  $z=0, l$ . В результате находим:

$$X_0 = A \{(\sin \kappa l - \operatorname{sh} \kappa l)(\cos \kappa z - \operatorname{ch} \kappa z) - (\cos \kappa l - \operatorname{ch} \kappa l)(\sin \kappa z - \operatorname{sh} \kappa z)\}$$

и уравнение

$$\cos \kappa l \operatorname{ch} \kappa l = 1,$$

корни которого определяют собственные частоты колебаний. Наименьшая из собственных частот равна

$$\omega_{\min} = \frac{22,4}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{QS}}.$$

5. То же для стержня с опёртыми концами.

Решение аналогично решению задачи 4. Результат:

$$X_0 = A \sin \kappa z,$$

а частоты определяются из  $\sin \kappa l = 0$ , т. е.

$$\kappa = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{QS}}.$$

6. То же для стержня, заделанного на одном конце и свободного на другом.

Решение. Получаем для смещения

$$X_0 = A \{(\cos \kappa l + \operatorname{ch} \kappa l)(\cos \kappa z - \operatorname{c} \kappa z) + (\sin \kappa l - \operatorname{sh} \kappa l)(\sin \kappa z - \operatorname{sh} \kappa z)\}$$

(закреплённый конец  $z=0$ , свободный  $z=l$ ), и уравнение

$$\cos \kappa l \operatorname{ch} \kappa l + 1 = 0$$

для собственных частот. Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{QS}}.$$

7. Определить собственные колебания прямоугольной пластинки (длины сторон  $a$  и  $b$ ) с опёртыми краями.

Решение. Уравнение (25,6) при подстановке в него

$$\zeta = \zeta_0(x, y) \cos(\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\Delta \Delta \zeta_0 - \kappa^4 \zeta_0 = 0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{12Q(1-\sigma^2)}{h^2 E}.$$

Выбираем оси координат по сторонам пластинки. Граничные условия (12,11) приобретают вид

$$\begin{aligned} \text{при } x=0, a: \quad \zeta &= 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0; \\ \text{при } y=0, b: \quad \zeta &= 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta_0 = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

( $m, n$  — целые числа), причём частоты определяются равенством

$$\omega = h \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\sigma^2)}} \pi^2 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right].$$

8. Определить собственные частоты колебаний мембраны прямоугольной формы (с длинами сторон  $a$  и  $b$ ).

Решение. Уравнение колебаний мембраны

$$T \Delta \zeta = \rho h \ddot{\zeta}$$

(ср. уравнение равновесия (14,9)). Края мембраны должны быть закреплены так что  $\zeta = 0$ . Соответствующее решение для прямоугольной мембраны есть

$$\zeta = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t,$$

где собственные частоты

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho h} \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

( $m, n$  — целые числа).

9. Определить скорость распространения крутильных колебаний по стержням с сечением в виде круга, эллипса и равностороннего треугольника и по стержню, имеющему вид длинной прямоугольной тонкой пластинки.

Решение. Для кругового сечения (радиуса  $R$ ) момент инерции  $I = \frac{\pi R^4}{2}$ ;

взяв  $C$  из задачи 1 § 16, получим для скорости значение  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ , совпадающее со скоростью  $c_t$ .

Аналогично (используя результаты задач 2—4 § 16) получаем для стержня эллиптического сечения скорость

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}};$$

для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника

$$\sqrt{\frac{3\mu}{5\rho}};$$

для стержня в виде длинной прямоугольной пластинки

$$2 \frac{h}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Все эти скорости меньше  $c_t$ .

10. Поверхность бесконечно глубокой несжимаемой жидкости покрыта тонкой упругой пластинкой. Определить связь между волновым вектором и частотой для волн, одновременно распространяющихся по пластинке и в поверхностном слое жидкости.

Решение. Выбираем плоскость пластинки в качестве плоскости  $z=0$ , а ось  $x$  выбираем вдоль направления распространения волны; области жидкости пусть соответствуют  $z < 0$ . Уравнение движения свободной пластинки есть

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}$$

( $\rho_0$  — плотность материала пластинки). При наличии жидкости к правой стороне этого уравнения надо прибавить силу, действующую со стороны жидкости на  $1 \text{ см}^2$  поверхности пластинки, т. е. давление  $p$  жидкости. Но давление в волне выражается через потенциал скорости посредством  $p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  (полем тяжести пренебрегаем). Поэтому получаем уравнение

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}. \quad (1)$$

Далее, нормальная компонента скорости жидкости на её поверхности должна быть равна скорости точек пластинки, откуда получаем условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

Потенциал  $\varphi$  должен удовлетворять во всём объёме жидкости уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Ищем  $\zeta$  в виде бегущей волны  $\zeta = \zeta_0 e^{ikx - i\omega t}$ ; соответственно этому берём решение уравнения (3) в виде затухающей в глубь жидкости поверхностной волны  $\varphi = \varphi_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{kz}$ . Подстановка этих выражений в (1) и (2) приводит к двум уравнениям для  $\varphi_0$  и  $\zeta_0$ , из условия совместности которых получаем

$$\omega^2 = \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{k^5}{(\rho + h\rho_0 k)}.$$

## § 26. Ангармонические колебания

Вся изложенная теория упругих колебаний является приближённой в том же смысле, в каком приближённа вообще вся теория упругости, основанная на законе Гука. Напомним, что в её основе лежит разложение упругой энергии в ряд по степеням тензора деформации, причём оставляются члены до второго порядка включительно. Соответственно этому компоненты тензора напряжений оказываются линейными функциями компонент тензора деформации, и уравнения движения — линейны.

Наиболее характерной особенностью упругих волн в этом приближении является то, что всякую волну можно представить в виде

простого наложения, т. е. в виде линейной комбинации отдельных монохроматических волн. Каждая из этих монохроматических волн распространяется независимо от остальных и может существовать также и сама по себе, не сопровождаясь какими-либо посторонними движениями. Можно сказать, что различные монохроматические волны, одновременно распространяющиеся в одной и той же среде, «не взаимодействуют» друг с другом.

Все эти свойства, однако, исчезают при переходе к следующим приближениям. Эффекты следующих приближений, хотя и являются малыми, но для некоторых явлений могут играть основную роль. Эти эффекты обычно называют *ангармоническими* в связи с тем, что соответствующие уравнения движения нелинейны и не допускают простых периодических (гармонических) решений.

Мы рассмотрим здесь ангармонические эффекты третьего порядка, происходящие от кубических по деформации членов в упругой энергии. Выписывать в общем виде соответствующие уравнения движения было бы слишком громоздким. Выяснить же характер возникающих эффектов возможно с помощью следующих рассуждений. Кубические члены в упругой энергии дают квадратичные члены в тензоре напряжений, а потому и в уравнениях движения. Представим себе, что в этих уравнениях все линейные члены перенесены в левые, а все квадратичные — в правые стороны равенств. Решая эти уравнения методом последовательных приближений, мы должны в первом приближении вовсе отбросить квадратичные члены. Тогда останутся обычные линейные уравнения, решение  $u_0$  которых может быть представлено в виде наложения монохроматических бегущих волн вида  $\text{const. } e^{i(kr - \omega t)}$  с определёнными соотношениями между  $\omega$  и  $k$ . Переходя к следующему, второму, приближению, надо положить  $u = u_0 + u_1$ , причём в правой стороне уравнений (в квадратичных членах) надо сохранить только члены с  $u_0$ . Поскольку  $u_0$  удовлетворяет, по определению, однородным линейным уравнениям без правых частей, то в левой стороне равенств члены с  $u_0$  взаимно сокращаются. В результате мы получим для компонент вектора  $u_1$  систему неоднородных линейных уравнений, в правой части которых стоят заданные функции координат и времени. Эти функции, получающиеся подстановкой  $u_0$  в правые стороны исходных уравнений, представляют собой сумму членов, каждый из которых пропорционален множителю вида  $e^{i[(k_1 - k_2)r - (\omega_1 - \omega_2)t]}$ , или  $e^{i[(k_1 + k_2)r - (\omega_1 + \omega_2)t]}$ , где  $\omega_1, \omega_2$  и  $k_1, k_2$  — частоты и волновые векторы каких-либо двух монохроматических волн первого приближения.

Как известно, частный интеграл линейных уравнений такого вида представляет собой сумму членов с такими же экспоненциальными множителями, какие стоят в свободных членах (правых сторонах) уравнений, и с надлежащим образом подобранными коэффициентами. Каждый из этих членов соответствует бегущей волне с частотой

$\omega_1 \pm \omega_2$  и волновым вектором  $k_1 \pm k_2$  (частоты, равные сумме или разности частот исходных волн, называются *комбинационными*).

Таким образом, эффекты ангармоничности третьего порядка приводят к тому, что на совокупность основных монохроматических волн (с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots$  и волновыми векторами  $k_1, k_2, \dots$ ) налагаются некоторые «волны» слабой интенсивности с комбинационными частотами вида  $\omega_1 \pm \omega_2$  и волновыми векторами  $k_1 \pm k_2$ . Мы говорим здесь о них как о «волнах» в кавычках, имея в виду, что они представляют собой некоторый поправочный эффект и не могут существовать сами по себе (за исключением некоторых особых случаев; см. ниже). Между  $\omega_1 \pm \omega_2$  и  $k_1 \pm k_2$  не удовлетворяются, вообще говоря, те соотношения, которые имеют место для частот и волновых векторов в обычных монохроматических волнах.

Ясно, однако, что возможны и такие специальные подборы значений  $\omega_1, k_1$  и  $\omega_2, k_2$ , при которых между  $\omega_1 + \omega_2$  и  $k_1 + k_2$  (будем говорить для определённости о суммах, а не о разностях) будет выполняться одно из тех соотношений, которые должны иметь место для монохроматических волн в данной среде. Вводя обозначения  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, k_3 = k_1 + k_2$ , мы можем сказать, с математической точки зрения, что  $\omega_3, k_3$  соответствуют в этих случаях волнам, удовлетворяющим однородным линейным уравнениям движения (без правой части) первого приближения. Если в правой стороне уравнений движения второго приближения имеются члены, пропорциональные  $e^{i(k_3 r - \omega_3 t)}$  с такими  $\omega_3, k_3$ , то, как известно, частный интеграл этих уравнений будет представлять собой волну этой частоты с амплитудой, неограниченно возрастающей со временем.

Таким образом, наложение двух монохроматических волн  $\omega_1, k_1$  и  $\omega_2, k_2$ , для которых суммы  $\omega_3, k_3$  удовлетворяют указанному условию, приводит в результате эффекта ангармоничности к явлению резонанса — возникает новая настоящая монохроматическая волна  $\omega_3, k_3$ , амплитуда которой возрастает со временем и в конце концов перестает быть малой. Очевидно, что если при наложении волн  $\omega_1, k_1$  и  $\omega_2, k_2$  возникает волна  $\omega_3, k_3$ , то при наложении волн  $\omega_1, k_1$  и  $\omega_3, k_3$  тоже будет иметь место резонанс и возникает волна  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1, k_2 = k_3 - k_1$ , а при наложении волн  $\omega_2, k_2$  и  $\omega_3, k_3$  возникает волна  $\omega_1, k_1$ .

В частности, в изотропном теле  $\omega$  связано с  $k$  посредством  $\omega = c_t k$  или  $\omega = c_l k$ , причём  $c_l > c_t$ . Легко видеть, в каких случаях возможно выполнение какого-либо из этих соотношений для каждой из трёх волн:  $\omega_1, k_1; \omega_2, k_2$  и  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, k_3 = k_1 + k_2$ . Если  $k_1$  и  $k_2$  не совпадают по направлению, то  $k_3 < k_1 + k_2$ ; ясно поэтому, что при таких  $k_1, k_2$  резонанс возможен лишь в следующих двух случаях: 1) волны  $\omega_1, k_1$  и  $\omega_2, k_2$  поперечны, а волна  $\omega_3, k_3$  продольна; 2) одна из волн  $\omega_1, k_1$  или  $\omega_2, k_2$  продольна,

другая поперечна, а волна  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  продольна. Если же векторы  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  имеют одинаковое направление, то резонанс возможен в случаях, когда все три волны продольны или все три поперечны.

Эффект ангармоничности с явлением резонанса возникает не только при наложении нескольких монохроматических волн, но и при наличии всего одной только волны  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ . В этом случае в правой стороне уравнений движения имеются члены, пропорциональные  $e^{2i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)}$ . Но если для  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  удовлетворяется обычное соотношение, то (в силу однородности первого порядка этого соотношения) оно удовлетворяется и для  $2\omega_1$ ,  $2\mathbf{k}_1$ . Таким образом, эффект ангармоничности приводит к появлению наряду с каждой из имеющихся монохроматических волн  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  также и волны  $2\omega_1$ ,  $2\mathbf{k}_1$  с удвоенными частотой и волновым вектором, причём амплитуда этой волны растёт со временем.

Наконец, остановимся коротко на том, каким образом могут быть составлены уравнения движения с учётом ангармонических членов. Тензор деформации должен определяться теперь полным выражением (1,3):

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (26,1)$$

в котором нельзя пренебречь квадратичными по  $u_i$  членами. Далее, общее выражение для плотности энергии  $\mathcal{E}$ <sup>1)</sup> для тел с данной симметрией должно быть написано как скаляр, составленный из компонент тензора  $u_{ik}$  и некоторых характерных для вещества тела постоянных тензоров, содержащих члены до желаемой степени по  $u_{ik}$ . Подставляя затем выражение (26,1) для  $u_{ik}$  и отбрасывая члены слишком высоких порядков по  $u_i$ , получим энергию  $\mathcal{E}$  как функцию производных  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  с желаемой степенью точности.

Для того чтобы получить уравнения движения, заметим следующее. Вариация  $\delta\mathcal{E}$  может быть написана в виде

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

или, вводя обозначение:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}, \quad (26,2)$$

переписываем  $\delta\mathcal{E}$  следующим образом:

$$\delta\mathcal{E} = \sigma_{ik} \frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \delta u_i) - \delta u_i \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

<sup>1)</sup> Мы говорим здесь о внутренней энергии  $\mathcal{E}$ , а не о свободной энергии  $F$ , поскольку речь идёт об адиабатических колебаниях.

Коэффициенты при  $-\delta u_i$  представляют собой компоненты силы, отнесённой к единице объёма тела. Они имеют формально прежний вид, и потому уравнения движения могут быть написаны по-прежнему в виде

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (26,3)$$

где  $\rho_0$  — плотность недеформированного тела, а компоненты тензора  $\sigma_{ik}$  определяются теперь согласно (26,2) с  $\mathcal{E}$ , написанным с желаемой степенью точности. Тензор  $\sigma_{ik}$  теперь не симметричен<sup>1)</sup>.

### Задача

Написать общее выражение для упругой энергии изотропного тела в третьем приближении.

Решение. Из компонент симметрического тензора второго ранга можно составить два квадратичных скаляра ( $u_{ik}^2$  и  $u_{ll}^2$ ) и три кубических ( $u_{ll}^3$ ,  $u_{ll}u_{ik}^2$ ,  $u_{ik}u_{il}u_{kl}$ ). Поэтому наиболее общий вид скалярного выражения, содержащего члены второй и третьей степеней по  $u_{ik}$  со скалярными же (изотропное тело!) коэффициентами, есть

$$\mathcal{E} = \mu u_{ik}^2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) u_{ll}^2 + \frac{A}{3} u_{ik}u_{il}u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3} u_{ll}^3$$

(коэффициенты при  $u_{ik}^2$  и  $u_{ll}^2$  выражены через модули сжатия и сдвига;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — три новые постоянные). Подставляя сюда выражение (26,1) для  $u_{ik}$  и оставляя члены до третьего порядка включительно, получим упругую энергию в виде

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 + \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left( \frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{A}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{B}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{C}{3} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^3.$$

<sup>1)</sup> Подчёркнём, что  $\sigma_{ik}$  не имеет теперь смысла плотности потока импульса (тензора напряжений). В обычной теории такое истолкование получалось в результате интегрирования плотности объёмной силы  $\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$  по объёму тела. При этом существенно, что при интегрировании мы не делали различия между координатами точек тела до и после деформирования, пренебрегая разницей между ними. Однако при переходе к следующим приближениям такое пренебрежение становится невозможным, и поверхность, ограничивающая область интегрирования, не совпадает с реальной поверхностью рассматриваемого участка тела после его деформирования.

В § 2 было показано, что симметричность тензора  $\sigma_{ik}$  связана с сохранением момента количества движения. Теперь этот результат не имеет места в связи с тем, что «плотность момента количества движения» должна писаться не в виде  $x_i u_k - x_k u_i$ , а как

$$(x_i + u_i) u_k - (x_k + u_k) u_i.$$

ГЛАВА IV  
ДИСЛОКАЦИИ

§ 27. Упругие деформации при наличии дислокации

Упругие деформации в кристалле могут быть связаны не только с воздействием на него внешних сил, но и с наличием в нём внутренних дефектов структуры. Основным видом таких дефектов, существенных для механических свойств кристаллов, являются так называемые *дислокации*. Изучение свойств дислокаций с атомарной, микроскопической точки зрения не входит, разумеется, в план этой книги; мы рассмотрим здесь лишь чисто макроскопические аспекты этого явления с точки зрения теории упругости. Однако для лучшего уяснения физического смысла излагаемых соотношений мы предварительно напомним на двух простых примерах, в чём заключается характер дислокационных дефектов с точки зрения структуры кристаллической решётки.

Представим себе, что в кристаллическую решётку (разрез которой изображён на рис. 22) вдвинута «лишняя» кристаллическая полуплоскость (совпадающая на рисунке с верхней полуплоскостью  $y, z$ ). Линия края этой полуплоскости (перпендикулярная плоскости рисунка ось  $z$ ) называется в этом случае *краевой дислокацией*. Искажение структуры решётки в непосредственной близости к дислокации велико, но уже на расстояниях порядка нескольких периодов кристаллические плоскости смыкаются друг с другом почти правильным образом. Деформация существует, однако, и вдали от дислокации. Она ясно обнаруживается при обходе в плоскости  $x, y$  по узлам решётки вдоль замкнутого контура вокруг начала координат: если определять вектором  $\mathbf{u}$  смещение каждого узла от его положения в идеальной решётке, то полное приращение этого вектора при обходе будет отлично от нуля и равно одному периоду вдоль оси  $x$ .

Другой тип дислокации можно наглядно представить себе как результат «разреза» решётки по полуплоскости, после чего части решетки по обе стороны разреза сдвигаются навстречу вдоль друг

друга на один период параллельно краю разреза (который называется в этом случае *винтовой дислокацией*). Наличие такой дислокации превращает кристаллические плоскости в решетке в геликондальную поверхность (подобную винтовой лестнице без ступенек). При полном обходе вокруг линии дислокации (ось

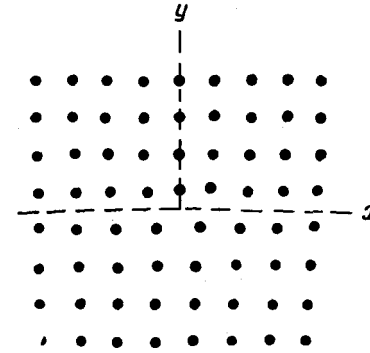


Рис. 22.

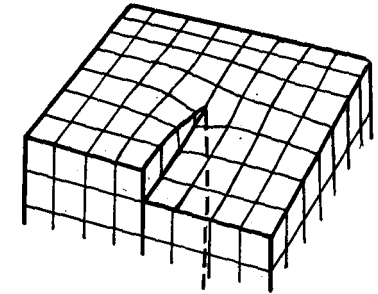


Рис. 23.

геликондальной поверхности) вектор смещения узлов получает приращение на один период параллельно этой оси. На рис. 23 изображена схема описанного разреза.

С макроскопической точки зрения дислокационная деформация кристалла как сплошной среды обладает в общем случае следующим свойством: при обходе по любому замкнутому контуру  $L$ , охватывающему линию дислокации  $D$ , вектор упругого смещения  $\mathbf{u}$  получает определённое конечное приращение  $\mathbf{b}$ , равное (по величине и направлению) одному из периодов решётки; постоянный вектор  $\mathbf{b}$  называется *вектором Бюргерса* данной дислокации. Это свойство записывается в виде

$$\oint_L du_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = -b_i, \quad (27,1)$$

причём принимается, что направление обхода контура связано правилом винта с выбранным направлением вектора касательной к линии дислокации  $\boldsymbol{\tau}$  (рис. 24)<sup>1)</sup>. Сама линия дислокации является при этом линией особых точек поля деформации.

<sup>1)</sup> Упомянутым выше простым случаям краевой и винтовой дислокаций отвечают прямые линии  $D$ , вдоль которых  $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{b}$  или  $\boldsymbol{\tau} \parallel \mathbf{b}$ . Отметим также, что в наглядной картине рис. 22 краевые дислокации с противоположными



Очевидно, что вектор Бюргерса  $\mathbf{b}$  неизбежно постоянен вдоль всей линии дислокации. Очевидно также, что линия дислокации не может просто окончиться внутри кристалла. Она должна выходить обоими концами на поверхность кристалла, либо (как это обычно и бывает в реальных случаях) представлять собой замкнутую петлю.

Условие (27,1) означает, другими словами, что при наличии дислокации вектор смещения является неоднозначной функцией координат, получающей заданное приращение при обходе вокруг линии дислокации. Физически, разумеется, никакой неоднозначности нет: приращение  $\mathbf{b}$  означает дополнительное смещение точек решётки на один из периодов, что вообще не меняет её состояния.

Для дальнейшего удобно будет ввести обозначение

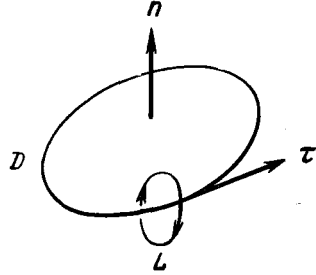


Рис. 24.

$$\omega_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (27,2)$$

с помощью которого условие (27,1) записывается в виде

$$\oint_L \omega_{ik} dx_i = -b_k. \quad (27,3)$$

Тензор  $\omega_{ik}$  (несимметричный) принято называть *тензором дисторсии*. Его симметричная часть даёт обычный тензор деформации:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (\omega_{ik} + \omega_{ki}). \quad (27,4)$$

Согласно сказанному выше, тензоры  $\omega_{ik}$  и  $u_{ik}$  (а с ними и тензор напряжений  $\sigma_{ik}$ ) являются однозначными функциями координат, в противоположность неоднозначной функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Условие (27,3) можно записать и в дифференциальном виде. Для этого преобразуем интеграл по контуру  $L$  в интеграл по какой-либо поверхности  $S_L$ , опирающейся на этот контур<sup>1)</sup>:

$$\oint_L \omega_{mk} dx_m = \int_{S_L} e_{ilm} \frac{\partial \omega_{mk}}{\partial x_l} df_i.$$

направлениями  $\mathbf{b}$  отличаются тем, что «лишняя» кристаллическая полуплоскость лежит сверху или снизу от плоскости  $x, z$  (о таких дислокациях говорят как о дислокациях разного знака).

<sup>1)</sup> Преобразование осуществляется, согласно теореме Стокса, заменой  $dx_m$  на оператор:

$$dx_m \rightarrow df_i e_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

где  $e_{ilm}$  — единичный антисимметричный тензор.

Постоянный же вектор  $b_k$  представим в виде интеграла по той же поверхности с помощью двухмерной  $\delta$ -функции:

$$b_k = \int_{S_L} \tau_i b_k \delta(\xi) df_i, \quad (27,5)$$

где  $\xi$  — двухмерный радиус-вектор, отсчитываемый от оси дислокации в плоскости, перпендикулярной вектору  $\boldsymbol{\tau}$  в данной точке. Ввиду произвольности контура  $L$  равенство этих интегралов означает равенство подынтегральных выражений:

$$e_{ilm} \frac{\partial \omega_{mk}}{\partial x_l} = -\tau_i b_k \delta(\xi). \quad (27,6)$$

Это и есть искомая дифференциальная запись<sup>1)</sup>.

Поле смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  вокруг дислокации может быть выражено в общем виде, если известен тензор Грина  $G_{ik}(\mathbf{r})$  уравнений равновесия данной анизотропной среды, т. е. функция, определяющая компоненту смещения  $u_i$ , созданную в неограниченной среде сосредоточенной в начале координат единичной силой, направленной вдоль оси  $x_k$  (см. § 8). Это легко сделать с помощью следующего формального приёма.

Вместо того чтобы искать неоднозначные решения уравнений равновесия, будем рассматривать  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  как однозначную функцию, условившись, что она испытывает заданный скачок  $\mathbf{b}$  на некоторой произвольно выбранной поверхности  $S_D$ , опирающейся на дислокационную петлю  $D$ . Тогда тензор деформации, формально определённый согласно (27,4), будет иметь на «поверхности разрыва»  $\delta$ -образную особенность:

$$u_{ik}^{(S)} = \frac{1}{2} (n_i b_k + n_k b_i) \delta(\xi), \quad (27,7)$$

где  $\xi$  — координата, отсчитываемая от поверхности  $S_D$  вдоль нормали  $\mathbf{n}$  (направленной по отношению к  $\boldsymbol{\tau}$  указанным на рис. 24 образом).

Поскольку никакой физической особенности в пространстве вокруг дислокации в действительности нет, то тензор напряжений  $\sigma_{ik}$ , как уже было указано, должен являться однозначной везде непрерывной функцией. Между тем с тензором деформации (27,7) формально связан тензор напряжений  $\sigma_{ik}^{(S)} = \lambda_{iklm} u_{lm}^{(S)}$ , тоже имеющий особенность на поверхности  $S_D$ . Для того чтобы исключить его, надо ввести фиктивные объёмные силы, распределённые вдоль поверхности  $S_D$  с определённой плотностью  $f^{(S)}$ . Уравнения равновесия при наличии объёмных сил имеют вид  $\frac{\partial \sigma_{ik}^{(S)}}{\partial x_k} + f_i^{(S)} = 0$  (ср. (2,7)).

<sup>1)</sup> Отметим во избежание недоразумений, что на самой линии дислокации ( $\xi \rightarrow 0$ ), как линии особых точек, представление  $\omega_{ik}$  в виде производных (27,2) теряет смысл.

Отсюда ясно, что надо положить

$$f_i^{(S)} = -\frac{\partial \sigma_{ik}^{(S)}}{\partial x_k} = -\lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}^{(S)}}{\partial x_k}. \quad (27,8)$$

Таким образом, задача об отыскании неоднозначной функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  эквивалентна задаче об отыскании однозначной, но разрывной функции при наличии объёмных сил, определяемых формулами (27,7) и (27,8). Мы можем теперь воспользоваться формулой

$$u_i(\mathbf{r}) = \int G_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f_j^{(S)}(\mathbf{r}') dV'.$$

Подставив сюда (27,8), производим интегрирование по частям; после этого  $\delta$ -функция интегрируется тривиально и получается:

$$u_i(\mathbf{r}) = -\lambda_{jklm} b_m \int_{S_D} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') df'. \quad (27,9)$$

Тем самым поставленная задача решена<sup>1)</sup>.

Наиболее простой вид деформация (27,9) имеет вдали от замкнутой дислокационной петли. Если представлять себе петлю расположенной вблизи начала координат, то на больших (по сравнению с её линейными размерами) расстояниях  $r$  имеем:

$$u_i(\mathbf{r}) = -\lambda_{jklm} d_{lm} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_k}, \quad (27,10)$$

где

$$d_{ik} = S_i b_k, \quad S_i = \int_{S_D} n_i df = \frac{1}{2} e_{ikl} \oint_D x_k dx_l, \quad (27,11)$$

а  $e_{ikl}$  — единичный антисимметричный тензор. Аксиальный вектор  $\mathbf{S}$  имеет компоненты, равные площадям, ограниченными проекциями петли  $D$  на плоскости, перпендикулярные соответствующим координатным осям; тензор  $d_{ik}$  естественно назвать тензором *дислокационного момента*. Компоненты тензора  $G_{ij}$  являются однородными функциями первого порядка от координат  $x, y, z$  (см. стр. 44). Поэтому из (27,10) видно, что  $u_i \propto 1/r^2$ . Соответствующее же поле напряжений  $\sigma_{ik} \propto 1/r^3$ .

Легко выяснить также характер зависимости от расстояния упругих напряжений вокруг прямолинейной дислокации. В цилиндрических координатах  $z, r, \varphi$  (с осью  $z$  вдоль линии дислокации)

<sup>1)</sup> Тензор  $G_{ij}$  для анизотропной среды найден в указанной на стр. 43 статье И. М. Лифшица и Л. Н. Розенцвейга. Этот тензор, вообще говоря, очень сложен. В случае прямолинейной дислокации, когда мы имеем дело с плоской задачей теории упругости, может оказаться проще непосредственно решать уравнения равновесия.

деформация будет зависеть только от  $r$  и  $\varphi$ . Интеграл (27,3) не должен меняться, в частности, при произвольном подобном изменении размеров любого контура в плоскости  $x, y$ . Очевидно, что это возможно, лишь если все  $\omega_{ik} \propto 1/r$ . Той же степени  $1/r$  будет пропорционален и тензор  $u_{ik}$ , а с ним и напряжения:  $\sigma_{ik} \propto 1/r^3$ .

Хотя до сих пор мы говорили только о дислокациях, но полученные формулы применимы также и к деформациям, вызываемым другим рода дефектами кристаллической структуры. Дислокации — линейные дефекты структуры. Наряду с ними существуют дефекты, в которых нарушение правильной структуры распространяется по области вблизи некоторой поверхности<sup>2)</sup>. С макроскопической точки зрения такой дефект может быть описан как поверхность разрыва, на которой вектор смещения  $\mathbf{u}$  испытывает скачок (напряжения же  $\sigma_{ik}$  остаются непрерывными в силу условий равновесия). Если на всей поверхности величина  $\mathbf{b}$  скачка одинакова, то в отношении создаваемых им деформаций такой разрыв ничем не отличается от дислокации (расположенной вдоль его края). Разница состоит лишь в том, что вектор  $\mathbf{b}$  не равен периоду решетки. Положение же поверхности  $S_D$ , о которой была речь выше, перестает быть произвольным и должно совпадать с фактическим расположением физического разрыва. С такой поверхностью разрыва связана определённая дополнительная энергия, что может быть описано путём введения соответствующего коэффициента поверхностного натяжения.

### Задачи

1. Написать дифференциальные уравнения равновесия для дислокационной деформации в изотропной среде, выраженные через вектор смещения<sup>3)</sup>.  
Решение. В терминах тензора напряжений или тензора деформации уравнения равновесия имеют обычный вид:  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  или, подставив  $\sigma_{ik}$

<sup>1)</sup> Обратим внимание на определённую аналогию между полем упругой деформации вокруг линии дислокации и магнитным полем линейных постоянных токов; роль силы тока играет при этом вектор Бюргерса (его постоянство вдоль линии дислокации также неизбежно, как и постоянство силы тока). Подобные аналогии будет легко заметить и в излагаемых ниже соотношениях. Однако, не говоря уже о совершенно различной природе тех и других физических явлений, эти аналогии не имеют сколько-нибудь глубокого характера также и ввиду различного тензорного характера соответствующих величин.

<sup>2)</sup> Известным примером такого рода дефектов является тонкая двойниковая прослойка в кристалле.

<sup>3)</sup> Физический смысл этой и других задач, относящихся к изотропной среде, условен, поскольку реальные дислокации по самому своему существу свойственны лишь кристаллам, т. е. анизотропной среде. Эти задачи, однако, представляют определённый иллюстративный интерес.

из (5,11):

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial u_{ii}}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Но при переходе к вектору  $\mathbf{u}$  надо учесть дифференциальное условие (27,6). Умножив (27,6) на  $e_{ikn}$  и упростив по  $i, k$ , получим<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k} - \frac{\partial w_{kk}}{\partial x_n} = -[\tau b]_n \delta(\xi). \quad (2)$$

Перепишав (1) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial w_{ii}}{\partial x_i} = 0$$

и подставив сюда (2), находим:

$$\frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial w_{ii}}{\partial x_i} = [\tau b]_i \delta(\xi).$$

Переходя теперь к  $\mathbf{u}$ , согласно (27,2), находим искомое уравнение для неоднозначной функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  в виде

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = [\tau b] \delta(\xi). \quad (3)$$

2. Определить деформацию вокруг прямолинейной винтовой дислокации в изотропной среде.

Решение. Выбираем цилиндрические координаты  $z, r, \varphi$  с осью  $z$  вдоль линии дислокации; вектор Бюргерса:  $b_x = b_y = 0, b_z = b$ . Из соображений симметрии очевидно, что смещение  $\mathbf{u}$  параллельно оси  $z$  и не зависит от координаты  $\varphi$ . Уравнение равновесия (3) задачи I сводится к  $\Delta u_z = 0$ . Решение, удовлетворяющее условию (27,1)<sup>2)</sup>:

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \varphi.$$

У тензоров  $u_{ik}$  и  $\sigma_{ik}$  отличны от нуля лишь компоненты

$$u_{z\varphi} = \frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{z\varphi} = \frac{\mu b}{2\pi r},$$

так что деформация представляет собой чистый сдвиг.

Свободная энергия дислокации (на единицу её длины) дается интегралом

$$F = \frac{1}{2} \int 2u_{z\varphi} \sigma_{z\varphi} dV = \frac{\mu b^2}{4\pi} \int \frac{dr}{r},$$

логарифмически расходящимся на обоих пределах. В качестве нижнего предела следует взять величину порядка атомных расстояний ( $\sim b$ ), на которых деформация велика и макроскопическая теория неприменима. Верхний же предел определяется размерами порядка длины  $L$  дислокации. Тогда

$$F = \frac{\mu b^2}{4\pi} \ln \frac{L}{b}.$$

<sup>1)</sup> Напомним формулу:

$$e_{ilm} e_{ikn} = \delta_{lk} \delta_{mn} - \delta_{ln} \delta_{mk}.$$

<sup>2)</sup> Во всех задачах о прямолинейных дислокациях принимаем вектор  $\tau$  в отрицательном направлении оси  $z$ .

Энергию же деформации в «сердцевине» дислокации вблизи её оси (в области с площадью сечения  $\sim b^2$ ) можно оценить как  $\sim \mu b^2$ . При  $\ln(L/b) \gg 1$  эта энергия мала по сравнению с энергией поля упругой деформации<sup>1)</sup>.

3. Определить внутренние напряжения в анизотропной среде вокруг винтовой дислокации, перпендикулярной плоскости симметрии кристалла.

Решение. Выбираем систему координат  $x, y, z$  так, чтобы ось  $z$  совпадала с линией дислокации (и снова пишем  $b_z = b$ ). Вектор  $\mathbf{u}$  опять имеет лишь компоненту  $u_z = u(x, y)$ . Так как плоскость  $x, y$  является плоскостью симметрии, то равны нулю все компоненты тензора  $\lambda_{iklm}$ , у которых индекс  $z$  встречается нечетное число раз. Поэтому отличны от нуля только две компоненты тензора  $\sigma_{ik}$ :

$$\sigma_{xz} = \lambda_{xzzz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{xzyz} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\sigma_{yz} = \lambda_{yzzz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{yzyz} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Введём двухмерные вектор  $\sigma$  и тензор  $\lambda_{\alpha\beta}$ :  $\sigma_\alpha = \sigma_{z\alpha}, \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha z \beta z} (\alpha = 1, 2)$ . Тогда

$$\sigma_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}.$$

а уравнение равновесия записывается в виде  $\operatorname{div} \sigma = 0$ . Искомое решение этого уравнения должно удовлетворять условию (27,1):  $\oint \nabla u d\mathbf{l} = b$

В таком виде задача совпадает с задачей о нахождении индукции и напряжённости магнитного поля (роль которого играют  $\sigma$  и  $\nabla u$ ) в анизотропной среде (с магнитной проницаемостью  $\lambda_{\alpha\beta}$ ) вокруг прямолинейного тока, сила которого  $I = cb/4\pi$ . Воспользовавшись известным из электродинамики решением этой задачи, найдём<sup>2)</sup>:

$$\sigma_{z\alpha} = -\frac{b}{2\pi} \frac{\lambda_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma z} x_\gamma}{\sqrt{|\lambda|} \lambda_{\alpha'\beta'} x_{\alpha'} x_{\beta'}},$$

где  $|\lambda|$  — определитель тензора  $\lambda_{\alpha\beta}$ .

4. Определить деформацию вокруг прямолинейной краевой дислокации в изотропной среде.

Решение. Пусть ось  $z$  направлена вдоль линии дислокации, а вектор Бюргерса:  $b_x = b, b_y = b_z = 0$ . Из симметрии задачи очевидно, что вектор деформации лежит в плоскости  $x, y$  и не зависит от  $z$ , так что мы имеем дело с плоской задачей. Ниже в этой задаче все векторы и векторные операции — двухмерные в плоскости  $x, y$ .

Будем искать решение уравнения

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = -b \mathbf{j} \delta(r)$$

<sup>1)</sup> Эти оценки имеют общий характер и справедливы, по порядку величины, для любой (не только винтовой) дислокации.

Следует отметить, что фактически значения  $\ln(L/b)$  обычно не столь велики, так что энергия «сердцевины» составляет заметную часть полной энергии дислокации.

<sup>2)</sup> См. «Электродинамика сплошных сред», задача 5 к § 29.

(см. задачу 1;  $\mathbf{j}$  — единичный вектор вдоль оси  $y$ ) в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{w}$ , где  $\mathbf{u}^{(0)}$  — вектор с составляющими

$$u_x^{(0)} = \frac{b}{2\pi} \varphi, \quad u_y^{(0)} = \frac{b}{2\pi} \ln r$$

(мнимая и вещественная части от  $(b/2\pi) \ln(x + iy)$ );  $r, \varphi$  — полярные координаты в плоскости  $x, y$ . Этот вектор удовлетворяет условию (27,1). Поэтому задача сводится к нахождению однозначной функции  $w$ . Поскольку, как легко убедиться,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \Delta \mathbf{u}^{(0)} = b\mathbf{j}\delta(r),$$

то  $w$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{w} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} = -2b\mathbf{j}\delta(r).$$

Это — уравнение равновесия под действием сил, сосредоточенных вдоль оси  $z$  с объёмной плотностью  $\frac{Ebj}{2(1+\sigma)} \delta(r)$  (ср. уравнение (1) в задаче к § 8).

С помощью найденного в той же задаче тензора Грина для неограниченной среды нахождение  $w$  сводится к вычислению интеграла

$$\mathbf{w} = \frac{b}{8\pi(1-\sigma)} 2 \int_0^\infty \left[ \frac{(3-4\sigma)\mathbf{j}}{R} + \frac{r\mathbf{y}}{R^3} \right] dz', \quad R = \sqrt{r^2 + z'^2}.$$

В результате получим:

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right\},$$

$$u_y = -\frac{b}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right\}.$$

Вычисленный отсюда тензор напряжений имеет декартовы компоненты

$$\sigma_{xx} = -bD \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = bD \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = bD \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

или полярные

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -bD \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = bD \frac{\cos \varphi}{r},$$

где обозначено  $D = \mu/2\pi(1-\sigma)$ .

5. Бесконечное число одинаковых параллельных прямолинейных краевых дислокаций в изотропной среде расположены в одной плоскости, перпендикулярной их векторам Бюргера, на одинаковых расстояниях  $h$  друг от друга. Найти напряжения сдвига, создаваемые такой «дислокационной стенкой» на расстояниях, больших по сравнению с  $h$ .

Решение. Пусть дислокации параллельны оси  $z$  и расположены в плоскости  $y, z$ . Согласно результатам задачи 4, суммарное напряжение, создаваемое всеми дислокациями в точке  $x, y$ , даётся суммой

$$\sigma_{xy}(x, y) = bDx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - (y - nh)^2}{[x^2 + (y - nh)^2]^2}.$$

Перепишем эту сумму в виде

$$\sigma_{xy} = -bD \frac{\alpha}{h} \left[ J(\alpha, \beta) + \alpha \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right],$$

где

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - n)^2}, \quad \alpha = \frac{x}{h}, \quad \beta = \frac{y}{h}.$$

Согласно формуле суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx,$$

найдем:

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k \alpha} d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} = \frac{\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k \alpha} \cos 2\pi k \beta.$$

При  $\alpha = x/h \gg 1$  в сумме по  $k$  можно оставить лишь первый член и в результате получим:

$$\sigma_{xy} = 4\pi^2 D \frac{bx}{h^2} e^{-2\pi x/h} \cos \left( 2\pi \frac{y}{h} \right).$$

Таким образом, напряжения убывают при удалении от стенки по экспоненциальному закону.

## § 28. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим дислокационную петлю  $D$  в поле упругих напряжений  $\sigma_{ik}^{(e)}$ , созданных заданными внешними нагрузками, и вычислим силу, действующую на неё в этом поле.

Согласно общим правилам, для этого надо найти работу  $\delta R$ , производимую внутренними напряжениями при бесконечно малом смещении петли  $D$ . Если  $\delta u_{ik}$  — изменение тензора деформации, вызванное этим смещением, то, согласно (3,1), имеем:

$$\delta R = - \int \sigma_{ik}^{(e)} \delta u_{ik} dV.$$

Поскольку распределение напряжений  $\sigma_{ik}^{(e)}$  предполагается не зависящим от положения дислокации, то можно вынести знак  $\delta$  за знак интеграла. Учитывая также симметричность тензора  $\sigma_{ik}^{(e)}$  и уравнение равновесия  $\frac{\partial \sigma_{ik}^{(e)}}{\partial x^k} = 0$ , пишем:

$$\begin{aligned} \delta R &= -\delta \int \sigma_{ik}^{(e)} u_{ik} dV = -\delta \int \sigma_{ik}^{(e)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dV = \\ &= -\delta \int \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ik}^{(e)} u_k) dV. \end{aligned} \quad (28,1)$$

Будем рассматривать, как это было объяснено в предыдущем параграфе, смещение  $\mathbf{u}$  как однозначную функцию, испытывающую разрыв на некоторой поверхности  $S_D$ , опирающейся на линию  $D$ . Тогда можно преобразовать объёмный интеграл в (28,1) в интеграл по замкнутой поверхности, проходящей по верхнему и нижнему берегам разреза  $S_D$ , соединённым бесконечно узкой боковой поверхностью (трубкой), огибающей линию  $D$ . На обоих берегах значения непрерывных величин  $\sigma_{ik}^{(e)}$  одинаковы, а значения  $\mathbf{u}$  отличаются на заданную величину  $\mathbf{b}$ . Поэтому получим <sup>1)</sup>:

$$\delta R = -b_k \delta \int_{S_D} \sigma_{ik}^{(e)} df_i. \quad (28,2)$$

Пусть каждый элемент линии дислокации  $d\mathbf{l}$  смещается на величину  $\delta \mathbf{r}$ . С этим смещением связано изменение площади поверхности  $S_D$ , элемент которого равен  $\delta \mathbf{f} = [\delta \mathbf{r} d\mathbf{l}]$ , т. е.

$$\delta f_i = e_{imn} \delta x_m \delta l_n = e_{imn} \delta x_m \tau_n dl.$$

Поэтому работа (28,2) представится в виде линейного интеграла по петле дислокации:

$$\delta R = - \oint_D b_k e_{imn} \sigma_{ki}^{(e)} \delta x_m \tau_n dl,$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор касательной к  $D$ .

Коэффициент при  $\delta x_m$  в подынтегральном выражении есть (с обратным знаком) сила  $f_m$ , действующая на единицу длины линии дислокации. Таким образом:

$$f_i = e_{ikt} \tau_k \sigma_{im}^{(e)} b_m \quad (28,3)$$

(М. Пич и Дж. Келер, 1950). Отметим, что сила  $\mathbf{f}$  перпендикулярна вектору  $\boldsymbol{\tau}$ , т. е. линии дислокации, а также вектору  $\sigma_{ik}^{(e)} b_k$ .

Плоскость, определяемую векторами  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{b}$  в каждой точке дислокации, называют *плоскостью скольжения* соответствующего элемента дислокации (эти плоскости для всех элементов, естественно, касаются поверхности скольжения всей дислокации, представляющей собой цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными вектору Бюргерса дислокации  $\mathbf{b}$ ). Физическая особенность плоскости скольжения состоит в том, что только в ней возможно сравнительно лёгкое механическое перемещение дисло-

<sup>1)</sup> Интеграл по боковой трубке радиуса  $\rho$  при  $\rho \rightarrow 0$  обращается в нуль, поскольку  $u_k$  обращаются в бесконечность медленнее, чем  $1/\rho$ .

кации <sup>1)</sup>. В связи с этим интересно определить составляющую силы (28,3) на эту плоскость.

Пусть  $\boldsymbol{\kappa}$  — вектор нормали к линии дислокации в плоскости скольжения. Тогда искомая составляющая силы (обозначим её  $f_{\perp}$ ) равна  $f_{\perp} = \boldsymbol{\kappa}_i f_i = e_{ikl} \boldsymbol{\kappa}_i \tau_k b_m \sigma_{lm}^{(e)}$ , или

$$f_{\perp} = \nu_l \sigma_{lm}^{(e)} b_m, \quad (28,4)$$

где  $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\tau}]$  — вектор нормали к плоскости скольжения. Поскольку векторы  $\mathbf{b}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  взаимно перпендикулярны, то (выбрав вдоль них две из координатных осей) мы видим, что сила  $f_{\perp}$  определяется всего одной из компонент  $\sigma_{lm}^{(e)}$ .

Полная сила, действующая на всю дислокационную петлю, равна

$$F_i = e_{ikt} b_m \oint_D \sigma_{im}^{(e)} dx_k. \quad (28,5)$$

Она отлична от нуля только в случае неоднородного поля напряжений (при  $\sigma_{im}^{(e)} = \text{const}$  интеграл сводится к  $\oint dx_k = 0$ ). Если на протяжении размеров петли поле напряжений меняется мало, то можно написать:

$$F_i = e_{ikt} b_m \frac{\partial \sigma_{im}^{(e)}}{\partial x_p} \oint_D x_p dx_k$$

(петлю представляем себе расположенной вблизи начала координат). Эту силу можно выразить через введённый в (27,11) дислокационный момент  $d_{kl}$ :

$$F_i = d_{kl} \frac{\partial \sigma_{kl}^{(e)}}{\partial x_i} \quad (28,6)$$

### Задачи

1. Найти силу взаимодействия двух параллельных винтовых дислокаций в изотропной среде.

Решение. Сила, действующая на единицу длины одной дислокации в поле напряжений, создаваемых второй дислокацией, определяется по

<sup>1)</sup> Это обстоятельство, как известно, следует из микроскопической картины дислокационного дефекта. Так, для передвижения изображённой на рис. 22 краевой дислокации в её плоскости скольжения (плоскость  $x, z$ ) достаточно сравнительно небольших перемещений атомов, в результате которых «лишними» будут оказываться все более удалённые от плоскости  $y, z$  (но по-прежнему параллельные ей) кристаллические полуплоскости.

Перемещение же дислокации в других направлениях возможно лишь путём диффузионных процессов. Так, изображённая на рис. 22 дислокация может перемещаться в плоскости  $y, z$  лишь за счёт диффузионного ухода атомов из «лишней» полуплоскости. Такой процесс может фактически играть роль лишь при достаточно высоких температурах.

формуле (28,4) с помощью результатов задачи 2 § 27. Она имеет радиальное направление и равна

$$f = \frac{\mu b_1 b_2}{2\pi r}$$

Дислокации одного знака ( $b_1 b_2 > 0$ ) отталкиваются, а дислокации разных знаков ( $b_1 b_2 < 0$ ) притягиваются

2. Прямолинейная винтовая дислокация расположена параллельно плоской свободной поверхности изотропной среды. Найти действующую на дислокацию силу

Решение. Пусть плоскость  $y, z$  совпадает с поверхностью тела, а дислокация параллельна оси  $z$  и имеет координаты  $x = x_0, y = 0$ .

Поле напряжений, оставляющее поверхность среды свободной, описывается суммой полей дислокации и её зеркального отражения в плоскости  $y, z$ , как если бы они были расположены в неограниченной среде:

$$\sigma_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi} \left[ \frac{y}{(x-x_0)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+x_0)^2 + y^2} \right],$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[ \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + y^2} - \frac{x+x_0}{(x+x_0)^2 + y^2} \right].$$

Такое поле действует на рассматриваемую дислокацию с силой, равной притяжению со стороны её зеркального изображения, т. е. дислокация притягивается к поверхности среды с силой

$$f = \frac{\mu b^2}{4\pi x_0}$$

3. Найти силу взаимодействия двух параллельных краевых дислокаций в изотропной среде, расположенных в параллельных плоскостях скольжения.

Решение. Пусть плоскости скольжения параллельны плоскостям  $x, z$ , а ось  $z$  параллельна линиям дислокаций; как и в задаче 4 § 27, полагаем  $\tau_z = -1, b_x = b$ . Тогда сила, действующая на единицу длины дислокации в поле упругих напряжений  $\sigma_{ik}$ , имеет компоненты

$$f_x = b\sigma_{xy}, \quad f_y = -b\sigma_{xx}.$$

В данном случае  $\sigma_{ik}$  определяются выражениями, найденными в задаче 4 § 27. Если одна дислокация совпадает с осью  $z$ , то она действует на вторую дислокацию, проходящую через точку  $x, y$  на плоскости  $x, y$ , с силой, компоненты которой в полярных координатах равны

$$f_r = \frac{b_1 b_2 D}{r}, \quad f_\varphi = \frac{b_1 b_2 D}{r} \sin 2\varphi, \quad D = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)}.$$

Проекция же силы на плоскость скольжения равна

$$f_x = b_1 b_2 D \frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{r}.$$

Она обращается в нуль при  $\varphi = \pi/2$  и при  $\varphi = \pi/4$ . Первое из этих положений соответствует устойчивому равновесию при  $b_1 b_2 > 0$ , а второе — при  $b_1 b_2 < 0$ .

## § 29. Непрерывное распределение дислокаций

Если в кристалле имеется одновременно много дислокаций, находящихся на относительно малых (хотя, конечно, и больших по сравнению с постоянной решётки) расстояниях, то становится целесообразным их усреднённое рассмотрение. Другими словами, рассматриваются «физически бесконечно малые» элементы объёма кристалла, через которые проходит достаточно много дислокационных линий.

Формулировка уравнения, выражающего основное свойство дислокационных деформаций, достигается естественным обобщением уравнения (27,6). Введём тензор  $Q_{ik}$  (тензор плотности дислокаций) такой, чтобы его интеграл по поверхности, опирающейся на любой контур  $L$ , был равен сумме  $\mathbf{b}$  векторов Бюргера всех дислокационных линий, охватываемых этим контуром:

$$\int_S Q_{ik} df_i = b_k. \quad (29,1)$$

Непрерывные функции  $Q_{ik}$  описывают распределение дислокаций в кристалле. Этот тензор заменяет собой теперь выражение в правой части уравнения (27,6):

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -Q_{ik}. \quad (29,2)$$

Как видно из этого уравнения, тензор  $Q_{ik}$  должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_i} = 0 \quad (29,3)$$

в случае одиночной дислокации это условие выражает собой просто постоянство вектора Бюргера вдоль линии дислокации).

При таком рассмотрении дислокаций тензор  $w_{ik}$  становится первичной величиной, описывающей деформацию и определяющей тензор деформации согласно (27,4). Вектор же смещения  $\mathbf{u}$ , который был бы связан с  $w_{ik}$  определением (27,2), при этом вообще не может быть введён (это ясно уже из того, что при таком определении левая сторона уравнения (29,2) тождественно обратилась бы в нуль во всём объёме кристалла).

До сих пор мы предполагали дислокации неподвижными. Выясним теперь, каким образом должна быть сформулирована система уравнений, позволяющая, в принципе, определить упругие деформации

и напряжения в среде, в которой дислокации совершают заданное движение (Е. Кренер, Г. Ридер, 1956)<sup>1)</sup>.

Уравнение (29,2) не зависит от того, покоятся или движутся дислокации. При этом тензор  $w_{ik}$  по-прежнему остаётся величиной, определяющей упругую деформацию; его симметричная часть есть тензор упругой деформации, связанный обычным образом законом Гука с тензором напряжений.

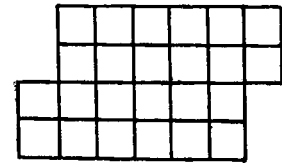
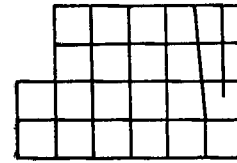
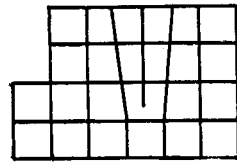
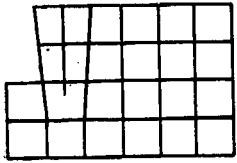


Рис. 25.

Это уравнение, однако, теперь недостаточно для полного формулирования задачи. Полная система уравнений должна определять также и скорость  $v$  перемещения точек среды.

Но при этом необходимо учесть, что движение дислокаций сопровождается, помимо изменения упругой деформации, также и изменением формы кристалла, не связанным с возникновением напряжений — *пластической деформацией*. Как известно, движение дислокаций как раз и представляет собой механизм пластической деформации. (Связь движения дислокаций с пластической деформацией ясно демонстрируется рис. 25: в результате прохождения краевой дислокации слева направо верхняя — над плоскостью скольжения — часть кристалла оказывается сдвинутой на один период решётки; поскольку решётка в результате остаётся правильной, то кристалл остаётся ненапряжённым.) В противоположность упругой деформации, однозначно связанной с термодинамическим состоянием тела, пластическая деформация является функцией процесса. При рассмотрении неподвижных дислокаций вопрос о разделении упругой и пластической деформаций не возникает: нас интересуют при этом лишь напряжения, не зависящие от предыдущей истории кристалла.

Пусть  $u$  — вектор геометрического смещения точек среды, отсчитываемый, скажем, от их положения перед началом процесса

<sup>1)</sup> Мы не занимаемся здесь вопросом об определении самого движения дислокаций по приложенным к телу силам. Решение этого вопроса требует детального изучения микроскопического механизма движения дислокаций и их торможения на различных дефектах, которое должно производиться с учётом фактических данных о реальных кристаллах.

деформации; его производная по времени  $\dot{u} = v$ . Если образовать с помощью вектора  $u$  тензор «полной дисторсии»  $W_{ik} = \partial u_k / \partial x_i$ , то мы получим его «пластическую часть»  $w_{ik}^{(pl)}$ , вычтя из  $W_{ik}$  тензор «упругой дисторсии», совпадающий с фигурирующим в (29,2) тензором  $w_{ik}$ . Введём обозначение

$$-j_{ik} = \frac{\partial w_{ik}^{(pl)}}{\partial t}; \quad (29,4)$$

симметричная часть  $j_{ik}$  определяет скорость изменения тензора пластической деформации: изменение  $u_{ik}^{(pl)}$  за бесконечно малое время  $\delta t$  равно

$$\delta u_{ik}^{(pl)} = -\frac{1}{2} (j_{ik} + j_{ki}) \delta t. \quad (29,5)$$

Отметим, в частности, что если пластическая деформация происходит без нарушения сплошности тела, то след тензора  $j_{ik}$  равен нулю. Действительно, пластическая деформация не приводит к растяжению или сжатию тела (которые всегда связаны с возникновением внутренних напряжений), т. е.  $u_{kk}^{(pl)} = 0$ , а потому и  $j_{kk} = -\partial u_{kk}^{(pl)} / \partial t = 0$ .

Подставив в определение (29,4)  $w_{ik}^{(pl)} = W_{ik} - w_{ik}$ , запишем его в виде уравнения

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + j_{ik}, \quad (29,6)$$

связывающего скорости изменения упругой и пластической деформаций. Здесь  $j_{ik}$  надо рассматривать как заданные величины, которые должны удовлетворять условиям, обеспечивающим совместность уравнений (29,6) и (29,2). Эти условия получаются дифференцированием (29,2) по времени и подстановкой в него (29,6); они имеют вид уравнения

$$\frac{\partial q_{ik}}{\partial t} + e_{ilm} \frac{\partial j_{mk}}{\partial x_l} = 0. \quad (29,7)$$

Полная система даётся уравнениями (29,2) и (29,6) вместе с динамическими уравнениями

$$q \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (29,8)$$

где  $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} = \lambda_{iklm} w_{lm}$ . Фигурирующие в этих уравнениях тензоры  $q_{ik}$  и  $j_{ik}$  являются заданными функциями координат (и времени), характеризующими распределение и движение дислокаций. Эти функции должны удовлетворять условиям совместности

уравнений (29,2) друг с другом и с уравнением (29,6), выражаемым равенствами (29,3) и (29,7).

Условие (29,7) можно рассматривать как дифференциальное выражение «закона сохранения вектора Бюргера» в среде. Действительно, проинтегрировав обе стороны уравнения (29,7) по поверхности, опирающейся на некоторую замкнутую линию  $L$ , введя согласно (29,1) полный вектор Бюргера  $\mathbf{b}$  охваченных линией  $L$  дислокаций и воспользовавшись теоремой Стокса, получим:

$$\frac{db_k}{dt} = - \oint_L j_{ik} dx_i. \quad (29,9)$$

Из вида этого равенства очевидно, что интеграл в его правой части определяет величину вектора Бюргера «протекающего» в единицу времени через контур  $L$ , т. е. уносимого дислокациями, пересекающими линию  $L$ . Поэтому естественно назвать  $j_{ik}$  тензором *плотности потока дислокаций*.

Ясно, в частности, что в случае отдельной дислокационной петли тензор  $j_{ik}$  имеет вид

$$j_{ik} = e_{ilm} Q_{lk} V_m = e_{ilm} \tau_l V_m b_k \delta(\xi) \quad (29,10)$$

( $Q_{lk}$  из (27,6)), где  $\mathbf{V}$  — скорость линии дислокации в данной её точке. При этом вектор потока через элемент  $d\mathbf{l}$  контура  $L$  ( $j_{ik} dl_i$ ) пропорционален  $d\mathbf{l}[\tau\mathbf{V}] = \mathbf{V}[d\mathbf{l}\tau]$ , т. е. проекции скорости  $\mathbf{V}$  на направление, перпендикулярное как  $d\mathbf{l}$ , так и  $\tau$ ; из геометрических соображений очевидно, что так и должно быть — только эта проекция скорости приводит к пересечению дислокацией элемента  $d\mathbf{l}$ .

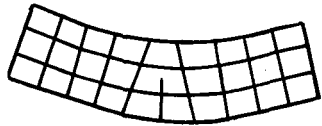


Рис. 26.

Отметим, что след тензора (29,10) пропорционален проекции скорости дислокации на нормаль к её плоскости скольжения. Выше было указано, что отсутствие неупругого изменения плотности среды обеспечивается условием  $j_{ii} = 0$ . Мы видим, что для отдельной дислокации это условие означает движение в плоскости скольжения в соответствии со сказанным выше о физической природе движения дислокаций (см. примечание на стр. 167).

Наконец, остановимся на случае, когда дислокационные петли в кристалле распределены таким образом, что их суммарный вектор Бюргера (обозначим его  $\mathbf{B}$ ) равен нулю<sup>1)</sup>. Это условие

означает, что при интегрировании по любому поперечному сечению тела

$$\int Q_{ik} df_i = 0. \quad (29,11)$$

Отсюда следует, что плотность дислокаций в этом случае может быть представлена в виде

$$Q_{ik} = e_{ilm} \frac{\partial P_{mk}}{\partial x_l} \quad (29,12)$$

(Ф. Кроуна, 1962); тогда интеграл (29,11) преобразуется в интеграл по контуру, проходящему вне тела и обращается в нуль. Отметим также, что выражение (29,12) автоматически удовлетворяет условию (29,3).

Легко видеть, что определённый таким образом тензор  $P_{ik}$  представляет собой плотность дислокационного момента в деформированном кристалле (его естественно назвать «дислокационной поляризацией»). Действительно, полный дислокационный момент кристалла  $D_{ik}$  равен, по определению:

$$D_{ik} = \sum S_l b_k = \frac{1}{2} e_{ilm} \sum b_k \oint_D x_l dx_m = \frac{1}{2} \int e_{ilm} x_l Q_{mk} dV,$$

где суммирование производится по всем дислокационным петлям, а интегрирование — по всему объёму кристалла. Подставив сюда (29,12), имеем:

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} e_{mpq} x_l \frac{\partial P_{qk}}{\partial x_p} dV = \frac{1}{2} \int x_m \left( \frac{\partial P_{mk}}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_m} \right) dV$$

и после интегрирования по частям в каждом из двух членов

$$D_{ik} = \int P_{ik} dV. \quad (29,13)$$

Плотность же потока дислокаций выражается через тот же тензор  $P_{ik}$  согласно

$$j_{ik} = - \frac{\partial P_{ik}}{\partial t}. \quad (29,14)$$

В этом легко убедиться, например, вычислив интеграл  $\int j_{ik} dV$  по произвольной части объёма тела с помощью выражения (29,10) как сумму по всем заключённым в этом объёме дислокационными петлями. Отметим, что выражение (29,14) вместе с (29,12) автоматически удовлетворяют условию (29,7).

Сравнив (29,14) и (29,4), мы видим, что  $\delta \omega_{ik}^{(nl)} = \delta P_{ik}$ . Если условиться считать пластическую деформацию отсутствующей

<sup>1)</sup> Наличие дислокации связано с некоторым изгибом кристалла, как это схематически изображено в утрированном виде на рис. 26. Условие  $\mathbf{B} = 0$  означает отсутствие макроскопического изгиба кристалла в целом.



в состоянии с  $P_{ik}=0$ , то будет и  $w_{ik}^{(n,l)}=P_{ik}^1$ ). Тогда

$$w_{ik} = W_{ik} - w_{ik}^{(n,l)} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - P_{ik}, \quad (29,15)$$

где снова  $u_k$  — вектор полного геометрического смещения от положения в недеформированном состоянии. Уравнение (29,6) при этом удовлетворяется тождественно, а динамическое уравнение (29,8) принимает вид

$$\rho \ddot{u}_i - \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} = -\lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}. \quad (29,16)$$

Таким образом, определение упругой деформации, созданной движущимися дислокациями с  $\mathbf{V}=0$ , сводится к задаче обычной теории упругости с объёмными силами, распределёнными по кристаллу с плотностью  $-\lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}$  (А. М. Косевич, 1963).

### § 30. Распределение взаимодействующих дислокаций

Рассмотрим совокупность большого числа одинаковых прямолинейных дислокаций, расположенных параллельно друг другу в одной и той же плоскости скольжения, и выведем уравнение, определяющее их равновесное распределение. Пусть ось  $z$  параллельна дислокациям, а полоскость  $x, z$  совпадает с плоскостью скольжения.

Будем, для определённости, считать, что векторы Бюргера дислокаций направлены вдоль оси  $x$ . Тогда сила, действующая в плоскости скольжения на единицу длины дислокации, равна  $b\sigma_{xy}$ , где  $\sigma_{xy}$  — напряжение в точке нахождения дислокации.

Напряжения, создаваемые одной прямолинейной дислокацией (и действующие на другую дислокацию), убывают обратно пропорционально расстоянию от неё. Поэтому напряжение, создаваемое в точке  $x$  дислокацией, находящейся в точке  $x'$ , имеет вид  $bD/(x-x')$ , где  $D$  — постоянная порядка величины упругих модулей кристалла. Можно показать, что эта постоянная  $D > 0$ , т. е. две одинаковые дислокации в одной и той же плоскости скольжения отталкиваются друг от друга<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Подразумевается, что весь процесс деформации происходит при  $\mathbf{V}=0$ . Это обстоятельство надо подчеркнуть, поскольку между тензорами  $P_{ik}$  и  $w_{ik}^{(n,l)}$  существует принципиальное различие: в то время как  $P_{ik}$  является функцией состояния тела, тензор  $w_{ik}^{(n,l)}$  не есть функция состояния, а зависит от процесса, приведшего тело в данное состояние.

<sup>2)</sup> Для изотропной среды это показано в задаче 3 § 28.

Обозначим посредством  $q(x)$  линейную плотность дислокаций, распределённых на отрезке  $(a_1, a_2)$  оси  $x$ ;  $q(x) dx$  есть сумма векторов Бюргера дислокаций, проходящих через точки интервала  $dx$ . Тогда полное напряжение, создаваемое в точке  $x$  оси  $x$  всеми дислокациями, запишется в виде интеграла

$$\sigma_{xy}(x) = -D \int_{a_1}^{a_2} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x}. \quad (30,1)$$

Для точек внутри самого отрезка  $(a_1, a_2)$  этот интеграл должен пониматься в смысле главного значения для того, чтобы исключить физически бессмысленное действие дислокации самой на себя.

Если в кристалле имеется также и плоское (в плоскости  $x, y$ ) поле напряжений  $\sigma_{xy}^{(e)}(x, y)$ , созданное заданными внешними нагрузками, то каждая дислокация будет находиться под действием силы  $b(\sigma_{xy} + p(x))$ , где мы обозначили для краткости  $p(x) = \sigma_{xy}^{(e)}(x, 0)$ . Условие равновесия заключается в обращении этой силы в нуль:  $\sigma_{xy} + p = 0$ , т. е.

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{p(x)}{D} \equiv \omega(x), \quad (30,2)$$

где главное значение обозначено, как это принято, перечёркнутым знаком интеграла. Это — интегральное уравнение для определения равновесного распределения  $q(x)$ . Оно относится к типу сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Решение такого уравнения сводится к задаче теории функций комплексного переменного, формулируемой следующим образом.

Обозначим посредством  $\Omega(z)$  функцию, определённую во всей плоскости комплексного  $z$  (с разрезом по отрезку  $(a_1, a_2)$ ), как интеграл

$$\Omega(z) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (30,3)$$

Посредством  $\Omega^+(x)$  и  $\Omega^-(x)$  обозначим предельные значения  $\Omega(z)$  на верхнем и нижнем берегах разреза. Они равны таким же интегралам, взятым по отрезку  $(a_1, a_2)$  с обходом точки  $z=x$  соответственно снизу или сверху по бесконечно малой полуокружности, т. е.

$$\Omega^\pm(x) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} \pm i\pi q(x). \quad (30,4)$$

Если  $\varrho(\xi)$  удовлетворяет уравнению (30,2), то главное значение интеграла равно  $\omega(x)$ , так что имеем:

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2\omega(x), \quad (30,5)$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 2i\pi\varrho(x). \quad (30,6)$$

Таким образом, задача о решении уравнения (30,2) эквивалентна задаче об отыскании аналитической функции  $\Omega(z)$  со свойством (30,5), после чего  $\varrho(x)$  определяется по (30,6). При этом физические условия рассматриваемой задачи требуют также, чтобы было  $\Omega(\infty) = 0$ ; это следует из того, что вдали от системы дислокаций ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) напряжения  $\sigma_{xy}$  должны обращаться в нуль (по определению (30,3), вне отрезка  $(a_1, a_2)$ :  $\sigma_{xy}(x) = -D\Omega(x)$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда внешние напряжения отсутствуют ( $p(x) \equiv 0$ ), а дислокации сдерживаются какими-либо препятствиями (дефектами решетки) на концах отрезка  $(a_1, a_2)$ . При  $\omega(x) = 0$  имеем из (30,5):  $\Omega^+(x) = -\Omega^-(x)$ , т. е. функция  $\Omega(z)$  должна менять знак при обходе каждой из двух точек  $a_1, a_2$ . Этому условию удовлетворяет любая функция вида

$$\Omega(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}}, \quad (30,7)$$

где  $P(z)$  — полином. Условие же  $\Omega(\infty) = 0$  фиксирует (с точностью до постоянного коэффициента) выбор  $P(z) = 1$ , так что

$$\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}}. \quad (30,8)$$

Такой же вид будет иметь, согласно (30,6), и искомая функция  $\varrho(x)$ . Определив коэффициент в ней согласно условию

$$\int_{a_1}^{a_2} \varrho(\xi) d\xi = B \quad (30,9)$$

( $B$  — сумма векторов Бюргера всех дислокаций), получим:

$$\varrho(x) = \frac{B}{\pi\sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}}. \quad (30,10)$$

Мы видим, что дислокации скапливаются по направлению к препятствиям (границам отрезка) с плотностью, обратно пропорциональной корню из расстояний до них. По такому же закону возрастают при приближении к  $a_1$  или  $a_2$  напряжения вне отрезка  $(a_1, a_2)$ ; так, при  $x > a_2$

$$\sigma_{xy} \cong \frac{BD}{\sqrt{(x-a_2)(a_2-a_1)}}.$$

Другими словами, концентрация дислокаций у границы приводит к такой же концентрации напряжений по другую сторону границы.

Предположим теперь, что в тех же условиях (препятствия в заданных концах отрезка) имеется также и внешнее поле напряжений  $p(x)$ . Обозначим посредством  $\Omega_0(z)$  функцию вида (30,7) и перепишем равенство (30,5) (разделив его на  $\Omega_0^+ = -\Omega_0^-$ ) в виде

$$\frac{\Omega^+(x)}{\Omega_0^+(x)} - \frac{\Omega^-(x)}{\Omega_0^-(x)} = \frac{2\omega(x)}{\Omega_0^+(x)}.$$

Сравнив это равенство с (30,6), заключаем из него, что

$$\frac{\Omega(z)}{\Omega_0(z)} = \frac{1}{i\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\Omega_0^+(\xi)} \frac{d\xi}{\xi-z} + i\pi P(z), \quad (30,11)$$

где  $P(z)$  — полином. Решение, удовлетворяющее условию  $\Omega(\infty) = 0$ , получим, выбрав в качестве  $\Omega_0(z)$  функцию (30,8) и положив  $P(z) = C$  ( $C$  — константа). Искомая функция  $\varrho(x)$  находится отсюда по формуле (30,6) и равна

$$\varrho(x) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}} \int_{a_1}^{a_2} \omega(\xi) \sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)} \frac{d\xi}{\xi-x} + \frac{C}{\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}}. \quad (30,12)$$

Постоянная  $C$  определяется условием (30,9). И здесь  $\varrho(x)$  возрастает при  $x \rightarrow a_2$  (или  $x \rightarrow a_1$ ) по закону  $(a_2-x)^{-1/2}$ , а по другую сторону препятствия возникает такая же концентрация напряжений.

Если препятствие имеется только с одной стороны (скажем, в точке  $a_2$ ), то искомое решение должно удовлетворять условию конечности напряжений при всех  $x < a_2$ , включая точку  $x = a_1$ ; при этом само положение последней точки заранее неизвестно и должно определиться в результате решения задачи. В терминах  $\Omega(z)$  это значит, что  $\Omega(a_1)$  должно быть конечным. Такая функция (удовлетворяющая также и условию  $\Omega(\infty) = 0$ ) получится по той же формуле (30,11), если в качестве  $\Omega_0(z)$  выбрать функцию

$$\Omega_0(z) = \sqrt{\frac{z-a_1}{a_2-z}},$$

тоже относящуюся к виду (30,7), и положить в (30,11)  $P(z) = 0$ . В результате получим:

$$\varrho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-x}} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{a_2-\xi}{\xi-a_1}} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\xi-x}. \quad (30,13)$$

При  $x \rightarrow a_1$ ,  $\varrho(x)$  обращается в нуль как  $\sqrt{x-a_1}$ . По такому же закону стремится к нулю с другой стороны точки  $a_1$  полное напряжение  $\sigma_{xy}(x) + p(x)$ .

Наконец, пусть препятствия отсутствуют в обоих концах отрезка и дислокации сдерживаются лишь внешними напряжениями  $p(x)$ . Соответствующее  $\Omega(z)$  получим, положив в (30,11)

$$\Omega_0(z) = \sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}, \quad P(z) = 0.$$

Однако условие  $\Omega(\infty) = 0$  требует при этом соблюдения дополнительного условия: произведя в (30,11) предельный переход к  $z \rightarrow \infty$ , найдём:

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}} = 0. \quad (30,14)$$

Искомая функция  $\varrho(x)$  даётся формулой

$$\varrho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)} \xi - x}, \quad (30,15)$$

причём координаты  $a_1$ ,  $a_2$  концов отрезка определяются условиями (30,9) и (30,14).

#### Задача

Найти распределение дислокаций в однородном поле напряжений ( $p(x) = p_0$ ) на участке с препятствием на одном или на обоих концах

Решение В случае препятствия на одном конце ( $a_2$ ) вычисление интеграла (30,13) даёт:

$$\varrho(x) = \frac{p_0}{\pi D} \sqrt{\frac{x - a_1}{a_2 - x}}.$$

Из условия же (30,9) определяется длина участка расположения дислокаций:  $a_2 - a_1 = 2BD/p_0$ . Вблизи препятствия, по другую сторону от него, напряжения концентрируются по закону

$$\sigma_{xy} \approx p_0 \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{x - a_2}}.$$

В случае участка (длины  $2L$ ), ограниченного двумя препятствиями, выбираем начало отсчёта  $x$  в его середине и находим по (30,12):

$$\varrho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{L^2 - x^2}} \left( \frac{p_0}{D} x + B \right).$$

### § 31. Равновесие трещины в упругой среде

Задача о равновесии трещины представляет значительное своеобразие в ряду других задач теории упругости. С точки зрения теории упругости трещина представляет собой полость в упругой среде, существующую при наличии внутренних напряжений в теле и «захлопывающуюся» при снятии нагрузки. Форма и размеры трещины существенно зависят от действующих напряжений. Математическая специфика задачи состоит поэтому в том, что граничные условия в ней задаются на поверхности, которая заранее неизвестна и должна сама определиться в результате решения задачи<sup>1)</sup>.

Рассмотрим трещину в изотропной среде, неограниченно длинную и однородную в одном направлении (вдоль оси  $z$ ) и находящуюся в плоском поле напряжений  $\sigma_{ik}^{(e)}(x, y)$ ; другими словами, рассмотрим плоскую задачу теории упругости. Будем считать, что напряжения симметричны относительно центра сечения трещины. Тогда профиль сечения тоже будет симметричным (рис. 27). Обозначим его длину  $2L$ , а переменную ширину  $h(x)$ ; в силу симметричности трещины  $h(-x) = h(x)$ .

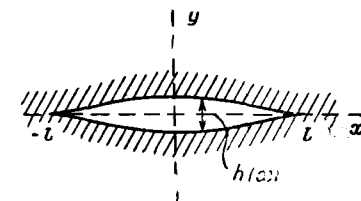


Рис. 27.

Будем считать трещину тонкой:  $h \ll L$ . Тогда граничные условия на её поверхности можно относить к соответствующему отрезку оси  $x$ . Другими словами, трещина рассматривается как линия разрыва (в плоскости  $x, y$ ), на которой испытывает скачок нормальная составляющая смещения  $u_y = \pm h/2$ .

Введём вместо  $h(x)$  другую неизвестную функцию  $\varrho(x)$ , определив её формулой

$$h(x) = \int_{-L}^x \varrho(\xi) d\xi, \quad \varrho(-x) = -\varrho(x). \quad (31,1)$$

Чисто формальным образом функцию  $\varrho(x)$  удобно истолковать как плотность прямолинейных (вдоль оси  $z$ ), непрерывно расположенных по оси  $x$  дислокаций, векторы Бюргера которых параллельны оси  $y$ <sup>2)</sup>. В § 27 было указано, что линию дислокации

<sup>1)</sup> Излагаемая количественная теория трещин принадлежит Г. И. Баренблату (1959).

<sup>2)</sup> Именно в связи с этим мы излагаем теорию трещин в главе о дислокациях, хотя с физической точки зрения речь идёт о совершенно различных явлениях.

можно рассматривать как край поверхности разрыва, на котором смещение  $u$  испытывает скачок  $b$ . В представлении (31,1) скачок  $h$  нормального смещения в точке  $x$  рассматривается как сумма векторов Бюргера всех дислокаций, проходящих левее этой точки (равенство же  $q(-x) = -q(x)$  означает, что дислокации справа и слева от точки  $x=0$  имеют разный знак).

Такое представление позволяет сразу написать выражение для нормальных напряжений ( $\sigma_{yy}$ ) на оси  $x$ . Они складываются из напряжений  $\sigma_{yy}^{(e)}(x, 0)$ , происходящих от внешних нагрузок (обозначим их для краткости  $p(x)$ ) и напряжений  $\sigma_{yy}^{(тр)}(x)$ , создаваемых деформацией от трещины. Рассматривая последние как создаваемые распределёнными на отрезке  $(-L, L)$  дислокациями, получим (аналогично (30,1)):

$$\sigma_{yy}^{(тр)}(x) = -D \int_{-L}^L \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} \quad (31,2)$$

(для точек на самом отрезке  $(-L, L)$  интеграл должен пониматься в смысле главного значения). Для изотропной среды

$$D = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)} = \frac{E}{4\pi(1-\sigma^2)} \quad (31,3)$$

(см. задачу 3 § 28). Напряжения же  $\sigma_{xy}$ , создаваемые такими дислокациями в изотропной среде, обращаются на оси  $x$  в нуль.

Граничное условие на свободной поверхности трещины, отнесённое (как указывалось выше) к соответствующему отрезку оси  $x$ , требует обращения в нуль нормальных напряжений  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(тр)} + p(x)$ . Это условие, однако, должно быть уточнено в связи со следующим обстоятельством.

Сделаем предположение (которое подтвердится получающимся результатом), что на краю трещины её берега смыкаются плавным образом, так что вблизи края обе поверхности сближаются до очень близких расстояний. В этих условиях необходимо учитывать силы молекулярного притяжения между поверхностями, действие которых распространяется, как известно, на расстояния  $r_0$ , большие по сравнению с межатомными. Эти силы будут играть существенную роль в узком участке вблизи края трещины, в котором  $h \leq r_0$  (обозначим порядок величины длины этого участка через  $d$ ; его оценка будет дана ниже).

Пусть  $G$  есть сила молекулярного сцепления, отнесённая к единице площади трещины; она зависит от расстояния  $h$  между по-

верхностями<sup>1)</sup>. С учётом этих сил граничное условие напишется в виде

$$\sigma_{yy}^{(тр)} + p(x) - G = 0. \quad (31,4)$$

Естественно предположить, что форма трещины на участке вблизи её края определяется характером сил сцепления и не зависит от приложенных к телу внешних нагрузок. Тогда при определении формы основной части трещины по внешним силам  $p(x)$  величина  $G$  приобретает характер не зависящей от  $p(x)$  заданной функции  $G(x)$  (на участке  $d$ , где она только и существенна).

Подставив в (31,4)  $\sigma_{yy}^{(тр)}$  из (31,2), получим таким образом следующее интегральное уравнение для  $q(x)$ :

$$\int_{-L}^L \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{1}{D} p(x) - \frac{1}{D} G(x) \equiv \omega(x). \quad (31,5)$$

Поскольку края трещины предполагаются не закреплёнными, напряжения на них должны оставаться конечными. Это значит, что при решении интегрального уравнения (31,5) мы имеем теперь дело с последним из рассмотренных в § 30 случаев, для которого ответ даётся формулой (30,15). При нашем выборе начала координат (в середине отрезка  $(-L, L)$ ) эта формула имеет вид

$$q(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{L^2 - x^2} \int_{-L}^L \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \frac{d\xi}{\xi - x}. \quad (31,6)$$

При этом должно выполняться условие (30,14), согласно которому в данном случае

$$\int_0^L \frac{p(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} - \int_0^L \frac{G(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 0 \quad (31,7)$$

(воспользовавшись симметрией задачи, мы перешли от интеграла по отрезку  $(-L, L)$  к интегралам от 0 до  $L$ ). Поскольку  $G(x)$  отлично от нуля лишь в области  $L-x \sim d$ , то во втором интеграле можно положить  $L^2 - x^2 \cong 2L(L-x)$ , и тогда условие (31,7) принимает

<sup>1)</sup> На больших (по сравнению с атомными) расстояниях  $G$  медленно убывает (ван-дер-ваальсовы силы). На расстояниях же порядка атомных  $G$  проходит через максимум и затем убывает до нуля соответственно тому, что на атомы, занимающие равновесные положения в сплошном твёрдом теле, никакой суммарной силы не действует.

вид

$$\int_0^L \frac{p(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} = \frac{M}{\sqrt{2L}}, \quad (31,8)$$

где через  $M$  мы обозначили константу (зависящую от материала среды):

$$M = \int_0^d \frac{G(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi}}. \quad (31,9)$$

Эта константа может быть выражена через обычные макроскопические характеристики тела — его упругие модули и поверхностное натяжение  $\alpha$ ; как мы увидим ниже, эта связь даётся формулой

$$M = \sqrt{\frac{\pi \alpha E}{1 - \sigma^2}}. \quad (31,10)$$

Равенство (31,8) представляет собой уравнение, определяющее длину трещины  $2L$  по заданному распределению напряжений  $p(x)$ . Так, для трещины, растягиваемой сосредоточенными силами  $f$ , приложенными к середине её сторон ( $p(x) = f\delta(x)$ ), находим:

$$2L = \frac{f^2}{M^2} = \frac{f^2(1 - \sigma^2)}{\pi \alpha E}. \quad (31,11)$$

Следует, однако, иметь в виду, что устойчивое равновесие трещины возможно не при всяком распределении  $p(x)$ . Так, для однородных растягивающих напряжений ( $p(x) = \text{const} \equiv p_0$ ) из (31,8) получим:

$$2L = \frac{4M^2}{\pi^2 p_0^2} = \frac{4\alpha E}{\pi(1 - \sigma^2) p_0^2}. \quad (31,12)$$

Обратный характер этой зависимости (убывание  $L$  при увеличении  $p_0$ ) указывает на неустойчивость состояния. Определяемое (31,12) значение  $L$  отвечает неустойчивому равновесию и даёт «критическую» длину трещины: более длинные трещины самопроизвольно растут, а менее длинные — «захлопываются» (этот результат был впервые получен А. Гриффитсом, 1920).

Обратимся теперь к исследованию профиля трещины. При  $L - x \leq d$  основную роль в интеграле в (31,6) играет область  $L - \xi \sim d$ , в которой  $\omega(\xi) \cong -G(\xi)/D$ . При этом интеграл может быть заменён его предельным значением при  $x \rightarrow L$  и получается  $p = \text{const} \sqrt{L - x}$ , откуда

$$h(x) = \text{const} (L - x)^{3/2} \quad (L - x \sim d). \quad (31,13)$$

Мы видим, что на конечном участке  $d$  обе стороны трещины действительно смыкаются плавным образом. Значение коэффициента в (31,13) зависит от свойств сил сцепления и не может быть выражено через обычные макроскопические параметры<sup>1)</sup>.

Для более удалённой от края части профиля, где  $d \ll L - x \ll L$ , в интеграле в (31,6) снова играет основную роль область  $L - \xi \sim d$ . Но помимо замен  $L^2 - x^2 \cong 2L(L - x)$ ,  $L^2 - \xi^2 \cong 2L(L - \xi)$  здесь можно заменить  $\xi - x \cong L - x$ . В результате получим:

$$q = \frac{M}{\pi^2 D \sqrt{L - x}},$$

где  $M$  — та же константа (31,9) — (31,10). Отсюда

$$h(x) = \frac{2M}{\pi^2 D} \sqrt{L - x} \quad (d \ll L - x \ll L). \quad (31,14)$$

Таким образом, кончик профиля оказывается не зависящим от приложенных сил (а тем самым и от длины трещины) во всей области  $L - x \ll L$ : при  $L - x \gg d$  профиль даётся выражением (31,14), а при  $L - x \sim d$  он имеет бесконечно острый «клюв» (31,13) (рис. 28). В остальной же части форма трещины зависит от приложенных сил.

Таким образом, если отвлечься от деталей размеров порядка радиуса действия сил сцепления, то трещина имеет плавный профиль с закруглёнными по параболам (31,14) концами, причём этот профиль полностью определяется по приложенным силам с помощью обычных макроскопических параметров. Но возникающие в действительности маленькие ( $\sim d$ ) концевые «клювы» имеют принципиальное значение: именно они обеспечивают конечность напряжений в концах трещины.

Напряжения, создаваемые трещиной на продолжении оси  $x$ , определяются формулой (31,2). На расстояниях  $x - L$ , таких, что  $d \ll x - L \ll L^2$ :

$$\sigma_{yy} \cong q_{yy}^{(тр)} \cong \frac{M}{\pi \sqrt{x - L}}. \quad (31,15)$$

<sup>1)</sup> По порядку величины  $\text{const} \sim a^{-1/2}$ , где  $a$  — атомные размеры. Оценка длины  $d$  получается из условия  $h \sim d^{3/2}/a^{1/2} \sim r_0$ , откуда  $d \sim (ar_0^2)^{1/3}$ . Это значит, что хотя  $d$  велико по сравнению с  $a$ , но в то же время мало по сравнению с  $r_0$ .

<sup>2)</sup> Интеграл легко вычислить непосредственно, но в этом даже нет необходимости, если учесть связь между функциями  $q(x)$  при  $x < L$  и  $\sigma_{yy}^{(тр)}$  при  $x > L$ , ясную из изложенных в § 30 выводов.

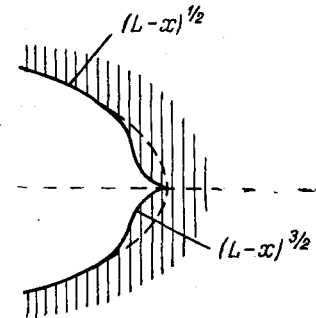


Рис. 28.

Возрастание напряжений при приближении к краю трещины продолжается по этому закону до расстояний  $x-L \sim d$ , после чего  $\sigma_{yy}$  падает до нуля в точке  $x=L$ .

Остаётся вывести приведенную уже выше формулу (31,10), связывающую константу  $M$  с обычными макроскопическими величинами. Для этого напишем условие минимальности полной свободной энергии, приравняв нулю её вариацию при изменении длины  $L$ .

С одной стороны, при увеличении длины трещины на  $\delta L$  увеличивается на  $\delta F_{\text{пов}} = 2\alpha\delta L$  поверхностная энергия на её двух свободных поверхностях. В то же время «раскрытие» конца трещины уменьшает упругую энергию  $F_{\text{уп}}$  на величину

$$\frac{1}{2} \int \sigma_{yy}(x) \eta(x) dx,$$

где  $\eta(x)$  — разность между шириной смещённого и несмещённого контуров трещины. Поскольку профиль конца трещины не зависит от её длины, то  $\eta(x) = h(x - \delta L) - h(x)$ . Напряжения  $\sigma_{yy} = 0$  при  $x < L$ , а  $h(x) = 0$  при  $x > L$ . Поэтому имеем:

$$\delta F_{\text{уп}} = -\frac{1}{2} \int_L^{L+\delta L} \sigma_{yy}(x) h(x - \delta L) dx.$$

Подставив сюда (31,14) и (31,15), получим:

$$\delta F_{\text{уп}} = -\frac{M^2}{\pi^2 D} \int_L^{L+\delta L} \sqrt{\frac{L+\delta L-x}{x-L}} dx = -\frac{M^2}{\pi^2 D} \int_0^{\delta L} \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{\delta L-y}} = -\frac{M^2}{2\pi^2 D} \delta L.$$

Наконец, из условия  $\delta F_{\text{пов}} + \delta F_{\text{уп}} = 0$  находим соотношение  $M^2 = 4\pi^2 \alpha D$ , откуда и получается (31,10)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Отметим, что в своём буквальном виде изложенная теория, включая соотношение (31,10), фактически применима к идеально хрупким телам, т. е. сохраняющим линейную упругость вплоть до разрушения (таким, как стекло, плавный кварц). В телах же, обладающих пластичностью, образование трещины может сопровождаться пластической деформацией у её концов.

## ГЛАВА V

### ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ВЯЗКОСТЬ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

#### § 32. Уравнение теплопроводности в твёрдых телах

Неравномерная нагретость твёрдой среды не приводит к возникновению в ней конвекции, как это обычно имеет место в жидкостях. Поэтому перенос тепла осуществляется здесь одной только теплопроводностью. В связи с этим процессы теплопроводности в твёрдых телах описываются сравнительно более простыми уравнениями, чем в жидкостях, где они осложняются конвекцией.

Уравнение теплопроводности в твёрдой среде может быть выведено непосредственно из закона сохранения энергии, выраженного в виде «уравнения непрерывности» для количества тепла. Количество тепла, поглощаемое в единицу времени в единице объёма тела, равно  $T \frac{\partial S}{\partial t}$ , где  $S$  — энтропия единицы объёма. Эта величина должна быть приравнена —  $\text{div } \mathbf{q}$ , где  $\mathbf{q}$  есть плотность потока тепла. Этот поток может быть практически всегда написан в виде  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ , т. е. пропорциональным градиенту температуры ( $\kappa$  — коэффициент теплопроводности). Таким образом,

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \text{div} (\kappa \nabla T). \quad (32,1)$$

Согласно формуле (6,4) энтропия может быть написана в виде

$$S = S_0(T) + \kappa \alpha u_{ii},$$

где  $\alpha$  есть коэффициент теплового расширения, а  $S_0$  — энтропия тела в недеформированном состоянии. Мы будем предполагать, что, как это обычно имеет место, имеющиеся в теле разности температур достаточно малы для того, чтобы можно было считать постоянными такие величины, как  $\kappa$ ,  $\alpha$  и т. п. Тогда уравнение (32,1) после подстановки написанного для  $S$  выражения примет вид

$$T \frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha \kappa T \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} = \kappa \Delta T.$$

Согласно известной термодинамической формуле имеем  $C_p - C_v = \kappa \alpha^2 T$ , откуда  $\alpha \kappa T = (C_p - C_v) / \alpha$ . Производную от  $S_0$  можно написать как  $\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}$ , где производная  $\frac{\partial S_0}{\partial T}$  берётся при  $u_{ii} \equiv \equiv \text{div } \mathbf{u} = 0$ , т. е. при постоянном объёме, и потому равна  $\frac{C_v}{T}$ .

В результате получим уравнение теплопроводности в следующем виде:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{u} = \kappa \Delta T. \quad (32,2)$$

Для того чтобы получить полную систему уравнений, надо присоединить сюда ещё уравнение, определяющее деформацию неравномерно нагретого тела. Этим уравнением является уравнение равновесия (7,8):

$$2(1 - \sigma) \text{grad div } \mathbf{u} - (1 - 2\sigma) \text{rot rot } \mathbf{u} = \frac{2\alpha(1 + \sigma)}{3} \nabla T. \quad (32,3)$$

Из уравнения (32,3) может быть определена принципиально деформация тела при произвольно заданном распределении температуры. Подстановка полученного таким образом для  $\text{div } \mathbf{u}$  выражения в уравнение (32,2) приведёт к уравнению, определяющему распределение температуры, в котором неизвестной функцией является одна только  $T(x, y, z, t)$ .

Рассмотрим, например, теплопроводность в неограниченной твёрдой среде с распределением температуры, удовлетворяющим только одному условию: на бесконечности температура стремится к постоянному пределу  $T_0$  и деформация отсутствует. В таком случае уравнение (32,3) приводит к следующей зависимости между  $\text{div } \mathbf{u}$  и  $T$  (см. задачу 8 § 7):

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1 + \sigma}{3(1 - \sigma)} \alpha (T - T_0).$$

Подставляя это выражение в (32,2), получим уравнение

$$\frac{(1 + \sigma) C_p + 2(1 - 2\sigma) C_v}{3(1 - \sigma)} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad (32,4)$$

типа простого уравнения теплопроводности.

Уравнением такого же типа описывается и распределение температуры вдоль длины тонкого прямого стержня, если хотя бы один из его концов не закреплён. Распределение температуры вдоль каждого из поперечных сечений стержня можно считать постоянным, так что  $T$  будет функцией только от координаты  $x$  вдоль его длины (и от времени). Тепловое расширение такого стержня приводит только к изменению его длины без изменения прямолинейной формы и без возникновения внутренних напряжений

в нём. Ясно поэтому, что производная  $\frac{\partial S}{\partial t}$  в общем уравнении (32,1) должна браться при постоянном давлении, и поскольку  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$ , то распределение температуры будет описываться одномерным уравнением теплопроводности:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Надо, впрочем, отметить, что с практически достаточной точностью распределение температуры в твёрдом теле может всегда определяться простым уравнением теплопроводности. Дело в том, что второй член в левой стороне уравнения (32,2) представляет собой поправку порядка  $(C_p - C_v) / C_v$  по сравнению с первым членом. Но у твёрдых тел разница между различными теплоёмкостями обычно весьма мала, и если пренебрегать ею, то уравнение теплопроводности в твёрдых телах можно всегда писать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (32,5)$$

где  $\chi$  есть коэффициент температуропроводности, определяемый как отношение  $\chi = \frac{\kappa}{C}$  — коэффициента  $\kappa$  к некоторой средней теплоёмкости  $C$  единицы объёма.

### § 33. Теплопроводность кристаллов

В анизотропном теле направление потока тепла  $\mathbf{q}$  не должно вообще говоря, совпадать с направлением градиента температуры. Поэтому вместо формулы  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  между  $\mathbf{q}$  и градиентом температуры в кристалле имеет место более общая зависимость

$$q_i = -\kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (33,1)$$

Тензор второго ранга  $\kappa_{ik}$  называется тензором теплопроводности кристалла. Соответственно этой зависимости уравнение теплопроводности (32,5) тоже будет иметь более общий вид:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (33,2)$$

О тензоре теплопроводности можно высказать общую теорему, согласно которой  $\kappa_{ik}$  есть симметрический тензор, т. е.

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ki}. \quad (33,3)$$

Это соотношение, к доказательству которого мы теперь перейдём, является следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов<sup>1)</sup>.

Скорость увеличения полной энтропии тела благодаря необратимым процессам теплопроводности равна

$$\dot{S}_{\text{пол}} = - \int \frac{\text{div } q}{T} dV = - \int \text{div } \frac{q}{T} dV + \int q \text{grad } \frac{1}{T} dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по поверхности, исчезает. Таким образом, получаем:

$$\dot{S}_{\text{пол}} = \int q \nabla \frac{1}{T} dV = - \int \frac{q \nabla T}{T^2} dV,$$

или

$$\dot{S}_{\text{пол}} = - \int \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} dV. \quad (33,4)$$

В соответствии с общим определением кинетических коэффициентов<sup>2)</sup> мы можем заключить на основании (33,4), что в данном случае таковыми являются коэффициенты  $T^2 \kappa_{ik}$  в соотношениях

$$q_i = - T^2 \kappa_{ik} \left( \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right).$$

Поэтому из симметрии кинетических коэффициентов непосредственно следует искомое соотношение (33,3).

Квадратичная форма

$$- q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

должна быть существенно положительной, поскольку положительной должна быть производная (33,4) от энтропии по времени. Условием существенной положительности квадратичной формы является, как известно, положительность главных значений матрицы её коэффициентов. Поэтому все главные значения тензора теплопроводности  $\kappa_{ik}$  всегда положительны, что, впрочем, очевидно и из простых соображений о направлении теплового потока.

Число различных независимых компонент тензора  $\kappa_{ik}$  зависит от симметрии кристалла. Поскольку тензор  $\kappa_{ik}$  симметричен, то, очевидно, это число такое же, как у симметричного тензора второго ранга  $\alpha_{ik}$  (тензора теплового расширения; см. § 10).

## § 34. Вязкость твёрдых тел

При изучении движения в упругих телах мы до сих пор считали, что процесс деформирования происходит обратимым образом. В действительности процесс термодинамически обратим только, если он происходит с бесконечно малой скоростью, так что в каждый данный момент в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия. Реальное движение происходит, однако, с конечной скоростью, тело не находится в каждый данный момент в равновесии, и поэтому в нём происходят процессы, стремящиеся привести его в равновесное состояние. Наличие этих процессов и приводит к необратимости движения, проявляющейся, в частности, в диссипации механической энергии<sup>1)</sup>, переходящей в конце концов в тепло.

Диссипация энергии обуславливается процессами двух родов. Во-первых, при неодинаковости температуры в разных местах тела в нём возникают необратимые процессы теплопроводности. Во-вторых, если в теле происходит какое-нибудь внутреннее движение, то происходят необратимые процессы, связанные с конечностью скорости движения; эти процессы диссипации энергии можно назвать, как и в жидкостях, процессами внутреннего трения или вязкости.

В большинстве случаев скорость макроскопического движения в теле настолько мала, что диссипация энергии незначительна. Такие «почти обратимые» процессы могут быть описаны с помощью так называемой диссипативной функции<sup>2)</sup>.

Именно, если имеется некоторая механическая система, движение которой сопровождается диссипацией энергии, то движение может быть описано посредством обычных уравнений движения, в которых надо только к действующим на систему силам добавить так называемые «диссипативные силы» или «силы трения», являющиеся линейными функциями скоростей. Эти силы могут быть представлены в виде производных по скоростям от некоторой квадратичной функции скоростей, называемой диссипативной функцией  $\Psi$ . «Сила трения»  $f_a$ , соответствующая какой-нибудь из обобщённых координат  $q_a$  системы, имеет тогда вид

$$f_a = - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_a}.$$

Диссипативная функция  $\Psi$  является существенно положительной квадратичной формой скоростей  $\dot{q}_a$ . Написанное соотношение

<sup>1)</sup> Под механической энергией здесь подразумевается сумма кинетической энергии макроскопического движения в упругом теле и его потенциальной (упругой) энергии, обусловленной наличием деформации.

<sup>2)</sup> См. «Статистическая физика», § 123.

<sup>1)</sup> См «Статистическая физика», § 122.

<sup>2)</sup> Мы используем здесь определение в форме, данной в «Гидродинамике», § 58.



эквивалентно соотношению

$$\delta\Psi = -\sum_a f_a \delta q_a, \quad (34,1)$$

где  $\delta\Psi$  — изменение диссипативной функции при бесконечно малом изменении скоростей. Можно также показать, что удвоенная диссипативная функция  $2\Psi$  определяет уменьшение механической энергии системы в единицу времени.

Легко обобщить соотношение (34,1) на случай движения с трением в сплошном теле. В этом случае состояние системы определяется непрерывным рядом обобщённых координат. Этими координатами является вектор смещения  $\mathbf{u}$ , заданный в каждой точке тела. Соответственное этому соотношение (34,1) должно быть написано в интегральном виде:

$$\delta \int \Psi dV = - \int f_i \delta u_i dV, \quad (34,2)$$

где  $f_i$  — компонента вектора  $\mathbf{f}$  диссипативной силы, действующей на единицу объёма тела; мы пишем полную диссипативную функцию всего тела в виде  $\int \Psi dV$ , где  $\Psi$  есть диссипативная функция, отнесённая к единице объёма тела.

Определим теперь общий вид диссипативной функции  $\Psi$  для деформируемых тел. Функция  $\Psi$ , описывающая внутреннее трение, должна обращаться в нуль, если в теле отсутствует внутреннее движение, в частности, если тело совершает только поступательное или вращательное движение как целое. Другими словами, диссипативная функция должна обращаться в нуль при  $\mathbf{u} = \text{const}$  и при  $\dot{\mathbf{u}} = [\Omega \mathbf{r}]$ . Это значит, что она должна зависеть не от самой скорости, а от её градиента, причём может содержать лишь такие комбинации производных, которые обращаются в нуль при  $\dot{\mathbf{u}} = [\Omega \mathbf{r}]$ . Таковыми являются суммы

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i},$$

т. е. производные  $\dot{u}_{ik}$  тензора деформации по времени<sup>1)</sup>. Таким образом, диссипативная функция должна быть квадратичной функцией от  $\dot{u}_{ik}$ . Наиболее общий вид такой функции есть

$$\Psi = \frac{1}{2} \eta_{iklm} \dot{u}_{ik} \dot{u}_{lm}. \quad (34,3)$$

Тензор четвёртого ранга  $\eta_{iklm}$  может быть назван тензором вязкости. Этот тензор обладает следующими очевидными свойствами

<sup>1)</sup> Ср. совершенно аналогичные рассуждения по поводу вязкой жидкости: «Гидродинамика», § 15.

симметрии:

$$\eta_{iklm} = \eta_{lmik} = \eta_{klim} = \eta_{ikml}. \quad (34,4)$$

Выражение (34,3) в точности аналогично выражению (10,1) для свободной энергии кристалла: вместо тензора упругости в нём стоит теперь тензор  $\eta_{iklm}$ , а вместо  $u_{ik}$  — тензор  $\dot{u}_{ik}$ . Поэтому все результаты, полученные в § 10 для тензора  $\lambda_{iklm}$  в кристаллах различной симметрии, в полной мере относятся и к тензору  $\eta_{iklm}$ .

В частности, в изотропном теле тензор  $\eta_{iklm}$  имеет всего две независимые компоненты и  $\Psi$  может быть написано в виде, аналогичном выражению (4,3) для упругой энергии изотропного тела:

$$\Psi = \eta \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \dot{u}_{ll}^2, \quad (34,5)$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  — два коэффициента вязкости. Поскольку  $\Psi$  есть существенно положительная функция, то коэффициенты  $\eta$ ,  $\zeta$  должны быть положительными.

Соотношение (34,2) в точности аналогично соотношению, имеющему место для свободной упругой энергии:

$$\delta \int F dV = - \int F_i \delta u_i dV,$$

где  $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  — сила, действующая на единицу объёма тела. Поэтому выражение для «диссипативной силы»  $f_i$  через тензор  $\dot{u}_{ik}$  может быть написано непосредственно по аналогии с тем, как  $F_i$  выражается через  $u_{ik}$ . Имеем:

$$f_i = \frac{\partial \dot{\sigma}_{ik}}{\partial x_k}, \quad (34,6)$$

где «диссипативный» тензор напряжений  $\dot{\sigma}_{ik}$  определяется посредством

$$\dot{\sigma}_{ik} = \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{u}_{ik}} = \eta_{iklm} \dot{u}_{lm}. \quad (34,7)$$

Учёт вязкости в уравнениях движения может быть осуществлён, следовательно, просто путём замены тензора напряжений  $\sigma_{ik}$  в этих уравнениях суммой  $\sigma_{ik} + \dot{\sigma}_{ik}$ .

В изотропном теле

$$\dot{\sigma}_{ik} = 2\eta \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right) + \zeta \dot{u}_{ll} \delta_{ik}. \quad (34,8)$$

Это выражение, естественно, формально совпадает с выражением для вязкого тензора напряжений в жидкости.

## § 35. Поглощение звука в твёрдых телах

Поглощение звука в твёрдых телах может быть вычислено совершенно аналогично тому, как вычисляется коэффициент поглощения в жидкостях<sup>1)</sup>. Произведём здесь соответствующие вычисления для изотропного тела. Обусловленная теплопроводностью часть диссипации энергии ( $\dot{E}_{\text{мех}}$ ) определяется интегралом

$$-\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV.$$

Благодаря вязкости же в единице объёма тела диссипируется в единицу времени энергия  $2\Psi$ , так что полная обусловленная вязкостью часть  $\dot{E}_{\text{мех}}$  равна интегралу  $-2 \int \Psi dV$ . Воспользовавшись выражением (34,5), имеем, таким образом, формулу

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2\eta \int \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ii} \right)^2 dV - \zeta \int \dot{u}_{ii}^2 dV. \quad (35,1)$$

Для вычисления градиента температуры пользуемся тем, что звуковые колебания в первом приближении адиабатичны. С помощью выражения (6,4) для энтропии пишем условие адиабатичности в виде

$$S_0(T) + K\alpha u_{ii} = S_0(T_0),$$

где  $T_0$  — температура в недеформированном состоянии. Разлагая разность  $S_0(T) - S_0(T_0)$  в ряд по степеням  $T - T_0$ , имеем с точностью до членов первого порядка

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T - T_0) \frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_p}{T_0} (T - T_0)$$

(производная от энтропии берётся при  $u_{ii} = 0$ , т. е. при постоянном объёме). Таким образом, имеем:

$$T - T_0 = -\frac{T\alpha K}{C_p} u_{ii}.$$

Воспользовавшись также соотношениями

$$K \equiv K_{\text{из}} = \frac{C_p}{C_p} K_{\text{ад}} \text{ и } \frac{K_{\text{ад}}}{\rho} = c_i^2 - \frac{4}{3} c_t^2,$$

перепишем это выражение в виде

$$T - T_0 = -\frac{T\alpha\rho}{C_p} \left( c_i^2 - \frac{4}{3} c_t^2 \right) u_{ii}. \quad (35,2)$$

<sup>1)</sup> См. «Гидродинамика», § 77.

Рассмотрим сначала поглощение поперечных упругих волн. Теплопроводность вообще не может привести к поглощению таких волн (в рассматриваемом приближении). Действительно, в поперечной волне  $u_{ii} = 0$ , и потому температура в ней согласно (35,2) постоянна. Пусть направление распространения волны выбрано в качестве оси  $x$ ; тогда  $u_x = 0$ ,  $u_y = u_{0y} \cos(kx - \omega t)$ ,  $u_z = u_{0z} \cos(kx - \omega t)$  и из компонент тензора деформации отличны от нуля только

$$u_{xy} = -\frac{u_{0y}k}{2} \sin(kx - \omega t), \quad u_{xz} = -\frac{u_{0z}k}{2} \sin(kx - \omega t).$$

Будем относить диссипацию энергии к единице объёма тела; для среднего (по времени) значения этой величины получаем из (35,1):

$$\bar{E}_{\text{мех}} = -\frac{\eta\omega^4}{2c_t^2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2),$$

где мы подставили  $k = \omega/c_t$ . Полная же средняя энергия волны равна удвоенной средней кинетической энергии, т. е.  $\bar{E} = \rho \int \bar{u}^2 dV$ ; относя эту величину тоже к единице объёма, получим:

$$\bar{E} = \frac{\rho\omega^2}{2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2).$$

Коэффициент поглощения звука определяется как отношение средней диссипации энергии к удвоенному среднему потоку энергии в волне; эта величина определяет закон изменения амплитуды волны с расстоянием, убывающей пропорционально  $e^{-\gamma x}$ . Таким образом, находим для коэффициента поглощения поперечных волн следующее выражение:

$$\gamma_t = \frac{|\bar{E}_{\text{мех}}|}{2c_t \bar{E}} = \frac{\eta\omega^2}{2\rho c_t^3}. \quad (35,3)$$

В продольной звуковой волне  $u_x = u_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $u_y = u_z = 0$ . Аналогичное вычисление с помощью формул (35,1) и (35,2) приводит к результату:

$$\gamma_l = \frac{\omega^2}{2\rho c_l^3} \left[ \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \frac{\kappa T \alpha^2 \rho^2 c_l^2}{C_p} \left( 1 - \frac{4c_t^2}{3c_l^2} \right)^2 \right]. \quad (35,4)$$

Эти формулы относятся, строго говоря, лишь к полностью изотропным аморфным телам. По порядку величины они, однако, определяют закон поглощения звука также и в анизотропных монокристаллах.

Своеобразные особенности представляет поглощение звука в поликристаллических телах. Если длина волны звука  $\lambda$  мала

по сравнению с размерами  $a$  отдельных кристаллитов, то в каждом кристаллите звук поглощается так же, как он поглощался бы в большом кристалле, и коэффициент поглощения пропорционален  $\omega^2$ .

Если же  $\lambda \gg a$ , то характер поглощения меняется. В такой волне можно считать, что каждый кристаллит подвергается воздействию однородно распределённого давления. Но ввиду анизотропии кристаллитов и граничных условий на поверхностях их соприкосновения возникающая при этом деформация не однородна. Она будет испытывать существенные изменения (изменение порядка величины её самой) на протяжении размеров кристаллита, а не на протяжении длины волны, как это было бы в однородном теле. Для поглощения звука существенны скорости изменения деформации  $\dot{u}_{ik}$  и возникающие градиенты температуры. Из них первые будут иметь по-прежнему обычный порядок величины. Градиенты же температуры в пределах каждого кристаллита аномально велики. Поэтому поглощение звука, обусловленное теплопроводностью, будет велико по сравнению с поглощением, связанным с вязкостью, и достаточно вычислить только первое.

Рассмотрим два различных предельных случая. Время, в течение которого происходит выравнивание температур на расстояниях  $\sim a$  путём теплопроводности (время релаксации для теплопроводности), — порядка величины  $a^2/\chi$ . Предположим сначала, что  $\omega \ll \chi/a^2$ . Это значит, что время релаксации мало по сравнению с периодом колебаний в волне, и потому тепловое равновесие в пределах каждого кристаллита в значительной степени успевает установиться; мы имеем здесь дело с почти изотермическими колебаниями.

Пусть  $T'$  — возникающие в кристаллите разности температур, а  $T'_0$  — разности, которые возникли бы при адиабатическом процессе. Расход тепла путём теплопроводности (на единицу объёма) есть

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \kappa \Delta T' \sim \frac{\kappa T'}{a^2}.$$

Количество же тепла, выделяющееся при деформации, — порядка величины  $\dot{T}'_0 C \sim \omega T'_0 C$  ( $C$  — теплоёмкость). Приравнявая эти два выражения, получим:

$$T' \sim T'_0 \frac{\omega a^2}{\chi}.$$

Температура испытывает изменение  $\sim T'$  на протяжении размеров кристаллита, так что её градиент  $\sim T'/a$ . Наконец,  $T'_0$  находим из (35,2), где надо положить  $u_{ii} \sim ku \sim \frac{\omega}{c} u$  ( $u$  — амплитуда вектора смещения):

$$T'_0 \sim \frac{T \alpha r c \omega}{C} u \quad (35,5)$$

(оценивая порядки величин, мы, естественно, не отличаем различные скорости звука  $c$ ). С помощью этих результатов вычисляем диссипацию энергии в единице объёма:

$$\bar{E}_{\text{мех}} \sim \frac{\kappa}{T} (\nabla T)^2 \sim \frac{\kappa}{T} \left( \frac{T'}{a} \right)^2$$

и, разделив её на поток энергии  $c \bar{E} \sim c \rho \omega^2 u^2$ , получим искомый коэффициент затухания:

$$\gamma \sim \frac{T \alpha^2 \rho c a^2}{\chi C} \omega^2 \quad \text{при } \omega \ll \frac{\chi}{a^2} \quad (35,6)$$

(К. Зинер, 1938). Сравнивая это выражение с обычным выражением (35,3) и (35,4), мы можем сказать, что в рассматриваемом случае поглощение звука поликристаллическим телом происходит так, как если бы оно обладало вязкостью

$$\eta \sim \frac{T \alpha^2 \rho^2 c^4 a^2}{\chi C},$$

гораздо большей, чем истинная вязкость составляющих его кристаллитов.

Далее, рассмотрим обратный предельный случай, когда  $\omega \gg \chi/a^2$ . Другими словами, время релаксации велико по сравнению с периодом колебаний в волне, и за время каждого периода не успевает произойти заметного выравнивания возникающих при деформации разностей температур. Было бы, однако, неправильным считать, что определяющие поглощение звука градиенты температуры порядка величины  $T'_0/a$ . Тем самым мы учитывали бы лишь процесс теплопроводности внутри каждого кристалла. Между тем, основную роль в данном случае должен играть теплообмен между соседними кристаллами (М. А. Исакович, 1948). Если бы кристаллиты были теплоизолированы друг от друга, то на границе между ними создавались бы разности температур того же порядка величины  $T'_0$ , что и разности температур в пределах отдельного кристаллита. В действительности же граничные условия требуют непрерывности температуры при переходе через поверхности соприкосновения между кристаллитами. В результате возникают «распространяющиеся» от границ внутрь кристаллита «температурные волны», затухающие на расстоянии<sup>1)</sup>

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\chi}{\omega}}.$$

<sup>1)</sup> Напомним, что если теплопроводящая среда ограничена плоскостью  $x=0$ , избыточная температура которой изменяется периодически по закону  $T' = T'_0 e^{-i\omega t}$ , то распределение температуры в среде описывается «температурной волной»

$$T' = T'_0 e^{-i\omega t} e^{-(1+i)x} \sqrt{\omega/2\chi}$$

(см. «Гидродинамика», § 52).

В рассматриваемом случае  $\delta \ll a$ , т. е. основной градиент температуры — порядка величины  $T'_0/\delta$  и имеет место на расстояниях, малых по сравнению с общими размерами кристаллита. Соответствующая часть объёма кристаллита  $\sim a^2\delta$ ; относя её к полному объёму  $\sim a^3$ , найдём среднюю диссипацию энергии:

$$\bar{E}_{\text{мех}} \sim \frac{\kappa}{T} \left( \frac{T'_0}{\delta} \right)^2 \frac{a^2\delta}{a^3} \approx \frac{\kappa T_0'^2}{T a \delta}.$$

Подставив для  $T'_0$  выражение (35,5) и разделив на  $c\bar{E} \sim c\varrho\omega^2 u^2$ , получим искомый коэффициент поглощения

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2\varrho c}{aC} \sqrt{\chi\omega} \quad \text{при } \omega \gg \frac{\chi}{a^2}. \quad (35,7)$$

Он оказывается пропорциональным корню из частоты<sup>1)</sup>.

Таким образом, коэффициент поглощения звука в поликристаллическом теле при самых малых частотах ( $\omega \ll \chi/a^2$ ) меняется как  $\omega^2$ ; затем следует (при  $\frac{\chi}{a^2} \ll \omega \ll \frac{c}{a}$ ) область изменения пропорционально  $\sqrt{\omega}$ , а при  $\omega \gg c/a$  коэффициент поглощения снова пропорционален  $\omega^2$ .

Аналогичные соображения относятся и к затуханию поперечных волн в тонких стержнях и пластинках (К. Зинер, 1938). Если  $h$  есть толщина стержня или пластинки, то при  $\lambda \gg h$  существен градиент температуры в поперечном направлении и затухание обусловлено в основном теплопроводностью (см. задачи этого параграфа). Если при этом выполняется неравенство  $\omega \ll \chi/h^2$ , то колебания можно считать изотермическими; поэтому при определении, например, частот собственных колебаний стержня или пластинки надо в этом случае пользоваться изотермическими значениями модулей упругости.

### Задачи

1. Определить коэффициент затухания продольных собственных колебаний стержня.

Решение. Коэффициент затухания колебаний со временем определяется как

$$\beta = \frac{|\bar{E}_{\text{мех}}|}{2\bar{E}};$$

амплитуда колебаний убывает со временем пропорционально  $e^{-\beta t}$ .

<sup>1)</sup> Такой же частотной зависимостью характеризуется поглощение звука, распространяющегося в жидкости или в газе вблизи твёрдой стенки (например, по трубе); см. «Гидродинамика», § 77.

В продольной волне в каждом малом участке стержня происходит продольное растяжение или сжатие; компоненты тензора деформации

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{ад} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Для  $u_z$  пишем  $u_z = u_0 \cos kz \cos \omega t$ , где

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{E_{ад}/\varrho}}.$$

Вычисления, аналогичные произведённым в тексте, приводят к следующему выражению для коэффициента затухания:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\varrho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_l^2 - 4c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)c_t^2} + \frac{\zeta c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)(3c_l^2 - 4c_t^2)} + \frac{\kappa T\alpha^2\alpha^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Вместо  $E_{ад}$ ,  $\sigma_{ад}$  мы ввели здесь скорости  $c_l$ ,  $c_t$  согласно формулам (22,4).

2. То же для продольных колебаний пластинки.  
Решение. Для волн с направлением колебаний, параллельным направлению волны (оси  $x$ ), имеем следующие отличные от нуля компоненты тензора деформации:

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma_{ад}}{1 - \sigma_{ад}} \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

(см. (13,1)). Скорость распространения этих волн равна

$$\sqrt{\frac{E_{ад}}{(1 - \sigma_{ад}^2)}}.$$

Вычисление приводит к результату:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\varrho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_l^4 + 4c_t^4 - 6c_l^2c_t^2}{c_l^2c_t^2(c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\zeta c_t^2}{c_l^2(c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\kappa T\alpha^2\varrho^2(1 + \sigma_{ад})^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Для волн с направлением колебаний, перпендикулярным к направлению волны,  $u_{ii} = 0$  и затухание обусловлено одной только вязкостью  $\eta$ . Коэффициент затухания для таких случаев всегда определяется формулой

$$\beta = \frac{\eta\omega^2}{2\varrho c_l^2}.$$

К этим случаям относится также и затухание крутильных колебаний в стержнях.

3. Определить коэффициент затухания поперечных собственных колебаний стержня (с частотами, удовлетворяющими условию  $\omega \gg \chi/h^2$ ,  $h$  — толщина стержня).

Решение. Основную роль в затухании играет теплопроводность. Согласно § 17 имеем в каждом элементе объёма стержня

$$u_{zz} = \frac{x}{R}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{ад} \frac{x}{R}$$

(изгиб в плоскости  $x, z$ ); при  $\omega \gg \chi/h^2$  колебания адиабатичны. При слабом изгибе радиус кривизны  $R = 1/X''$ , так что

$$u_{ii} = (1 - 2\sigma_{ад}) x X''$$

(штрих означает дифференцирование по  $z$ ). Наиболее быстрое изменение температур испытывает в направлении поперёк стержня; поэтому  $(\nabla T)^2 \approx \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2$ . С помощью (35,1) и (35,2) получаем для средней диссипации энергии во всём стержне

$$-\frac{\kappa T \alpha^2 E_{\text{ад}}^2 S}{9C_p^2} \int \overline{X'^2} dz$$

( $S$ —площадь сечения стержня). Среднюю полную энергию можно найти как удвоенную потенциальную энергию:

$$E_{\text{ад}} I_y \int \overline{X'^2} dz.$$

Окончательно получим для коэффициента затухания

$$\beta = \frac{\kappa T \alpha^2 S E_{\text{ад}}}{18 I_y C_p^2}.$$

4. То же для поперечных колебаний пластинки.

Решение. Согласно (11,4) имеем в каждом элементе объёма пластинки

$$u_{ii} = -\frac{1-2\sigma_{\text{ад}}}{1-\sigma_{\text{ад}}} z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(изгиб в плоскости  $x, z$ ). Диссипацию энергии находим по формулам (35,1) и (35,2), а полную среднюю энергию—удваивая выражение (11,6). Коэффициент затухания равен

$$\beta = \frac{2\kappa T \alpha^2 E_{\text{ад}} (1+\sigma_{\text{ад}})}{3C_p^2 h^2 (1-\sigma_{\text{ад}})} = \frac{2\kappa T \alpha^2 \rho (3c_l^2 - 4c_t^2)^2 c_t^2}{3C_p^2 h^2 (c_l^2 - c_t^2) c_l^2}.$$

5. Определить изменение собственных частот поперечных колебаний стержня, связанное с неадиабатичностью колебаний. Стержень имеет форму длинной пластинки толщины  $h$ . Поверхность стержня предполагается теплоизолированной.

Решение. Пусть  $T_{\text{ад}}(x, t)$  есть распределение температуры в стержне при адиабатических колебаниях, а  $T(x, t)$ —истинное распределение температуры в нём ( $x$ —координата вдоль толщины стержня; изменением температуры вдоль плоскости  $yz$  пренебрегаем как более медленным). Поскольку при  $T = T_{\text{ад}}$  теплообмен между отдельными участками тела отсутствует, то ясно, что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (T - T_{\text{ад}}) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

При периодических колебаниях с частотой  $\omega$  отклонения  $\tau_{\text{ад}} = T_{\text{ад}} - T_0$ ,  $\tau = T - T_0$  температуры от своего равновесного значения  $T_0$  пропорциональны  $e^{-i\omega t}$ , и мы имеем:

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} \tau_{\text{ад}}$$

(штрих означает дифференцирование по  $x$ ). Поскольку  $\tau_{\text{ад}}$  согласно (35,2) пропорционально  $u_{ii}$ , а компоненты  $u_{ik}$  пропорциональны  $x$  (см. § 17), то  $\tau_{\text{ад}} = Ax$ , где  $A$ —постоянная, которую нет надобности вычислять (она вы-

падает из окончательного ответа). Решение уравнения  $\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} Ax$  с граничным условием  $\tau' = 0$  при  $x = \pm \frac{h}{2}$  (поверхность стержня теплоизолирована) есть

$$\tau = A \left( x - \frac{\sin kx}{k \cos k \frac{h}{2}} \right), \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Момент  $M_y$  сил внутренних напряжений в изогнутом стержне (изгиб в плоскости  $xz$ ) складывается из изотермической части  $M_{y \text{ из}}$  (момент при изотермическом изгибе) и из части, связанной с неравномерной нагремостью стержня. Если  $M_{y \text{ ад}}$  есть момент при адиабатическом изгибе, то при не вполне адиабатическом процессе дополнительная часть момента уменьшается по сравнению с величиной  $M_{y \text{ ад}} - M_{y \text{ из}}$  в отношении

$$1 + f(\omega) = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \tau \tau dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \tau \tau_{\text{ад}} dz}.$$

Определяя при произвольной частоте  $\omega$  модуль Юнга  $E_\omega$  как коэффициент пропорциональности между  $M_y$  и  $\frac{I_y}{R}$  (см. (17,8)) и замечая, что  $E_{\text{ад}} - E = E^2 \frac{T \alpha^2}{9C_p}$  (см. (6,8);  $E$ —изотермический модуль Юнга), можем написать:

$$E_\omega = E + [1 + f(\omega)] E^2 \frac{T \alpha^2}{9C_p}.$$

Вычисление даёт для  $f(\omega)$  выражение

$$f(\omega) = \frac{24}{h^3 k^3} \left( \frac{kh}{2} - \text{tg} \frac{kh}{2} \right).$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  получаем, как и должно было быть,  $f=1$ , так что  $E_\infty = E_{\text{ад}}$ , а при  $\omega \rightarrow 0$   $f=0$  и  $E_0 = E$ .

Частоты собственных колебаний пропорциональны корню из модуля Юнга (см. задачи 4—6 § 25). Поэтому имеем:

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + f(\omega) \frac{ET \alpha^2}{18C_p} \right],$$

где  $\omega_0$ —значения собственных частот при полной адиабатичности колебаний. Это  $\omega$  комплексно. Отделяя действительную и мнимую части ( $\omega = \omega' + i\beta$ ), получаем окончательно для собственной частоты

$$\omega' = \omega_0 \left[ 1 - \frac{ET \alpha^2}{3C_p} \frac{1}{\xi^3} \frac{\text{sh} \xi - \sin \xi}{\text{ch} \xi + \cos \xi} \right]$$

и для коэффициента затухания:

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_p h^2} \left[ 1 - \frac{1}{\xi} \frac{\operatorname{sh} \xi + \sin \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \xi} \right],$$

где введено обозначение  $\xi = h \sqrt{\frac{\omega_0}{2\chi}}$ .

При больших значениях  $\xi$  частота  $\omega$  стремится, как и следовало, к  $\omega_0$ , а коэффициент затухания к

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_p h^2}$$

в согласии с результатом задачи 3.

Малые же значения  $\xi$  соответствуют почти изотермическим условиям; в этом случае

$$\omega \cong \omega_0 \left( 1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right) \cong \omega_0 \sqrt{\frac{E}{E_{ад}}},$$

а коэффициент затухания

$$\beta = \frac{ET^2\alpha^2 h^2}{180C_p \chi} \omega_0^2.$$

### § 36. Очень вязкие жидкости

Для типичных жидкостей уравнения Навье-Стокса применимы до тех пор, пока периоды движения велики по сравнению с молекулярными временами. Это, однако, не относится к очень вязким жидкостям. Для таких жидкостей обычные гидродинамические уравнения становятся неприменимыми уже при гораздо больших периодах движения. Существуют вязкие жидкости, которые в течение достаточно малых (но в то же время больших по сравнению с молекулярными) промежутков времени ведут себя, как твёрдые тела (например, глицерин, канифоль). Аморфные твёрдые тела (например, стекло) можно рассматривать как предельный случай таких жидкостей с весьма большой вязкостью.

Свойства этих жидкостей могут быть описаны следующим способом (предложенным Максвеллом). В течение малых промежутков времени они упруго деформируются. После прекращения деформации в них остаются напряжения сдвига, затухающие, однако, со временем, так что по истечении достаточно большого промежутка времени никаких внутренних напряжений в жидкости практически не остаётся. Пусть  $\tau$  есть порядок величины времени, в течение которого происходит затухание напряжений ( $\tau$  называют иногда максвелловским временем релаксации). Предположим, что жидкость подвергается воздействию некоторых переменных внешних сил, периодически меняющихся со временем с частотой  $\omega$ . Если период  $1/\omega$  изменения сил велик по сравнению с временем релаксации  $\tau$ , т. е.  $\omega\tau \ll 1$ , то рассматриваемая жидкость будет

вести себя, как обычная вязкая жидкость. Напротив, при достаточно больших частотах  $\omega$  (когда  $\omega\tau \gg 1$ ) жидкость будет вести себя, как аморфное твёрдое тело.

Соответственно таким «промежуточным» свойствам рассматриваемых жидкостей их можно характеризовать одновременно коэффициентом вязкости  $\eta$  и некоторым «модулем сдвига»  $\mu$ . Легко получить соотношение, связывающее друг с другом порядки величины  $\eta$ ,  $\mu$  и времени релаксации  $\tau$ . При воздействии периодических сил с достаточно малой частотой, когда жидкость ведёт себя как обычная, тензор напряжений определяется обычным выражением для вязких напряжений в жидкости, т. е.

$$\sigma_{ik} = 2\eta \dot{u}_{ik} = -2i\eta\omega u_{ik}.$$

В обратном предельном случае больших частот жидкость ведёт себя, как твёрдое тело, и внутренние напряжения должны определяться по формулам теории упругости, т. е.  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$  (речь идёт всё время о «деформациях чистого сдвига», так что предполагается, что  $u_{ii} = 0$ ,  $\sigma_{ii} = 0$ ). При частотах порядка  $\omega \sim 1/\tau$  напряжения, определяющиеся этими двумя выражениями, должны совпадать по порядку величины. Таким образом, имеем  $\frac{\eta u}{\lambda \tau} \sim \frac{\mu u}{\lambda}$ , откуда

$$\eta \sim \mu \tau. \quad (36,1)$$

Это и есть искомого соотношение.

Выведем, наконец, уравнение движения, качественно описывающее поведение рассматриваемых жидкостей. Для этого будем исходить из наиболее простого предположения о законе затухания внутренних напряжений (после прекращения движения); именно, будем считать, что оно происходит по простому экспоненциальному закону, чему соответствует уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \sigma_{ik}.$$

С другой стороны, в твёрдом теле было бы  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ , и потому

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt}.$$

Легко видеть, что уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt} \quad (36,2)$$

приводит к правильным результатам в обоих предельных случаях медленных и быстрых движений, а потому может служить интерполяционным уравнением для промежуточных случаев.

Так, для периодического движения, когда  $u_{ik}$  и  $\sigma_{ik}$  зависят от времени посредством множителя  $e^{-i\omega t}$ , имеем из (36,2)

$$-i\omega\sigma_{ik} + \frac{1}{\tau}\sigma_{ik} = -2i\omega\mu u_{ik},$$

откуда

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \frac{i}{\omega\tau}} u_{ik}. \quad (36,3)$$

При  $\omega\tau \gg 1$  эта формула даёт  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ , т. е. обычное выражение для твёрдых тел, а при  $\omega\tau \ll 1$ :

$$\sigma_{ik} = -2i\mu\tau\omega u_{ik} = 2\mu\tau i u_{ik}$$

— обычное выражение для жидкости с вязкостью  $\mu\tau$ .

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ<sup>1)</sup>

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Бигармоническое уравнение 31, 37    | Мембрана 80, 83                     |
| Вектор Бюргерса 157                 | Модули адиабатические 29            |
| — смещения 9                        | — изотермические 28                 |
| Внутренние напряжения 13            | — упругости кристаллов 52           |
| Всестороннее сжатие 16, 21          | Модуль всестороннего сжатия 21      |
|                                     | — растяжения (Юнга) 25              |
|                                     | — сдвига 21                         |
| Грина тензор 42, 44                 | Нейтральная поверхность 61, 97      |
| Групповая скорость 138              | Неустойчивость упругая 86, 124 и д. |
| Деформация цилиндра 34 и д.         | Одностороннее сжатие 27             |
| — шара 33 и д.                      | Отражение звука 133 и д.            |
| Дислокаций плотность 169            |                                     |
| — — потока 172                      | Пластическая деформация 19, 170     |
| Дислокационный момент 160, 173      | Плоская деформация 31               |
| Дислокация винтовая 157, 163, 167   | Плоское напряженное состояние 72    |
| — краевая 156, 163, 168             | Плоскость скольжения 166            |
| Дисторсии тензор 158                | Поверхностное натяжение 70          |
| Жесткость крутильная 93             | Простое растяжение 24               |
| — при изгибе 66, 115                |                                     |
| Контактная задача 45                | Сдвиг 21                            |
| Концентрация напряжений 39, 76      | Скорость звука 131                  |
| Коэффициент всестороннего сжатия 23 | Собственные колебания пластинки 149 |
| — Пуассона 25                       | — — полости 136                     |
| — теплового расширения 28, 58       | — — стержня 148                     |
| Коэффициенты Ламэ 21                | — — сферы 135                       |
| Максвелловская плотность 200        | Упругие деформации 18               |

<sup>1)</sup> Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указателе включены понятия и термины, непосредственно не отраженные в оглавлении.

*Лев Давыдович Ландау*  
*и Евгений Михайлович Лифшиц*  
Теория упругости

М., 1965 г., 204 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*  
Корректор *Г. Г. Желтова*

---

Сдано в набор 8/1 1965 г. Подписано к печати 30/111 1965 г. Бумага 60×90/16. Физ. печ. л. 12,75 Условн. печ. л. 12,75 Уч.-изд. л. 10,88. Тираж 62 000 экз. Т-01672. Цена книги 53 коп. Заказ № 2214.

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Первая Образцовая типография имени  
А. А. Жданова Главполиграфпрома  
Государственного комитета Совета Министров  
СССР по печати.  
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

---

Отпечатано с матриц в гос. типографии  
«Пяргале», Вильнюс, ул. Латако, 6.  
Заказ № 1624.